Über die Realisierbarkeit linearer stochastischer Prozesse durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Funktionalräumen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

von

Dirk Heidemann

aus Ergste

Bochum 1975

Über die Realisierbarkeit linearer stochastischer Prozesse durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Funktionalräumen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

von

Dirk Heidemann

aus Ergste

Bochum 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am 6.6.1975
Tag der mündlichen Prüfung: 8.7.1975

Dekan: Prof. Dr. H. Amann
Referent: Prof. Dr. P. Gänßler
Korreferent: Prof. Dr. V. Baumann

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorbemerkungen und Bezeichnungen.	1
Einleitung und Zusammenfassung.	6
§ 1. Hinreichende Realisierbarkeitskriterien und Betrachtungen hinsichtlich ihrer Notwendigkeit.	10
§ 2. Einige Gegenbeispiele.	22
§ 3. Stetigkeit von LSP und nukleare Räume.	31
§ 4. Eine hinreichende und notwendige Realisierbarkeitsbedingung.	36
§ 5. Weitere Bemerkungen über gewisse Klassen von Realisierbarkeitsbedingungen.	45
§ 6. τ-stetige Maße auf $\mathfrak{B}(E'_\sigma)$.	50
§ 7. Realisierbarkeit von LSP in Banachräumen.	57
§ 8. Eine Bemerkung über die Fortsetzbarkeit realisierbarer LSP. -	62
Literaturverzeichnis.	64

Vorbemerkungen und Bezeichnungen.

Gegeben sei ein separierter lokalkonvexer topologischer Vektorraum E über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen (LTVR). Wir bezeichnen mit E' (bzw. E^*) seinen topologischen (bzw. algebraischen) Dualraum. Nach Fernique [10] ist ein linearer stochastischer Prozeß (LSP) auf E eine nach E indizierte Gesamtheit $(X_t)_{t\in E}$ von Zufallsvariablen X_t über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum) $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ derart, daß jeder Pfad $X(\omega)$ ein Element von E^* ist. Wir setzen $\gamma_E := \{(t_1,\ldots,t_n) : n\in\mathbb{N}, t_i\in E$ paarweise verschieden$\}$. F sei ein Teilraum von E^* so, daß $<E,F>$ eine Dualität ist (vgl. [21], S. 123).
Wir bemerken, daß für jeden LTVR E $<E,E'>$ eine Dualität ist; umgekehrt kann für jede Dualität $<E,F>$ F aufgefaßt werden als der topologische Dualraum eines LTVR, z.B. $(E,\sigma(E,F))$, wobei $\sigma(E,F)$ die schwache Topologie auf E bzgl. der Dualität $<E,F>$ bezeichnet.

Für $S = (t_1,\ldots,t_n)\in\gamma_E$ definieren wir $\pi_S : E^* \to \mathbb{R}^{|S|}$ durch $f \mapsto (<f,t_1>,\ldots,<f,t_n>)$, wobei $|S| = n$ die Anzahl der Elemente von S ist. Wir setzen $\mathcal{Z}^S_{F,E} := \{F\cap\pi_S^{-1}(B): B\in\mathcal{B}^{|S|}\}$; dabei sei $\mathcal{B}^{|S|}$ die Gesamtheit der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^{|S|}$ ($\mathcal{B} := \mathcal{B}^1$).
$\mathcal{Z}_{F,E} := \bigcup_{S\in\gamma_E} \mathcal{Z}^S_{F,E}$ ist die Algebra der Zylindermengen in F und $\mathcal{A}(\mathcal{Z}_{F,E})$ die von $\mathcal{Z}_{F,E}$ erzeugte σ-Algebra.

Zu jedem LSP $(X_t)_{t\in E}$ wird ein endlich-additives Maß $\mu_{o,X,F}|\mathcal{Z}_{F,E}$

erklärt durch $\mu_{o,X,F}(F \cap A) := (P \circ X^{-1})(A) \; \forall \; A \in \mathcal{Z}_{E^*,E}$

(vgl. [8], S. 4), genannt das zylindrische Maß bzgl. $(X_t)_{t\in E}$ in F. $(X_t)_{t\in E}$ heißt realisierbar in F, falls $\mu_{o,X,F}$ fortsetzbar ist zu einem Maß $\mu_{X,F} | \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{F,E})$. Offensichtlich ist jeder LSP realisierbar in E^*.

Zur Abkürzung setzen wir $\mu_{o,X} := \mu_{o,X,E'}$, $\mu_X := \mu_{X,E'}$,

$\overline{\mu}_{o,X} := \mu_{o,X,E^*}$ und $\overline{\mu}_X := \mu_{X,E^*}$. Um den zugrunde liegenden LTVR E zu kennzeichnen, schreiben wir ggf. μ_{X_E} statt μ_X etc. .

Nach einem bekannten Satz von Doob ist ein LSP $(X_t)_{t\in E}$ genau dann in F realisierbar, wenn $\overline{\mu}_X^*(F) = 1$ (μ^* (bzw. μ_*) bezeichnet das zu einem Maß μ gehörige äußere (bzw. innere) Maß).

Die endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(X_t)_{t\in E}$ bezeichnen wir mit Q_{X_S}, d.h. es ist

$$Q_{X_S}(B) := P(\{\omega \in \Omega : X_S(\omega) \in B\}) \quad \forall \; S \in \mathcal{T}_E, \; \forall \; B \in \mathcal{B}^{|S|},$$

wobei $X_S(\omega) := (X_{t_1}(\omega), \ldots, X_{t_n}(\omega))$ für $S = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_E$.

Wir setzen $Q_{X_t} := Q_{X_{(t)}} \quad \forall \quad t \in E$.

Zwei LSP $(X_t)_{t\in E}$ und $(Y_t)_{t\in E}$ heißen äquivalent, falls

$Q_{X_S} = Q_{Y_S} \; \forall \; S \in \mathcal{T}_E$ oder - was damit gleichbedeutend ist -

falls $\mu_{o,X,F} = \mu_{o,Y,F}$. Offensichtlich gibt es eine bijektive Abbildung zwischen Äquivalenzklassen von LSP auf E und zylindrischen Maßen in F.

Die charakteristische Funktion $\mathcal{X}_X$ eines LSP $(X_t)_{t\in E}$ ist definiert durch $\mathcal{X}_X(t) := \mathbb{E}(e^{iX_t}) \; \forall \; t \in E$.

Im folgenden führen wir weitere Bezeichnungen auf, die in dieser Arbeit benutzt werden.

$\mathfrak{D}_E$:= {D : D abzählbar-dimensionaler Teilraum von E}

$\sigma(E,F)$: schwache Topologie auf E (bzgl. der Dualität $<E,F>$).

$\tau(E,F)$: Mackey-Topologie auf E (bzgl. der Dualität $<E,F>$).

$\beta(E,F)$: starke Topologie auf E (bzgl. der Dualität $<E,F>$).

F_σ (bzw. F_τ, F_β): F, versehen mit der Topologie $\sigma(F,E)$ (bzw. $\tau(F,E)$, $\beta(F,E)$).

$\mathfrak{B}(F_\sigma)$ (bzw. $\mathfrak{B}(F_\tau)$, $\mathfrak{B}(F_\beta)$): Borel-Mengen in F_σ (bzw. F_τ, F_β).

$\mathfrak{U}$: Nullumgebungsbasis in E, bestehend aus absolutkonvexen, abgeschlossenen Mengen.

$\mathfrak{U}^\circ(F)$:= $\{U^\circ : U \in \mathfrak{U}\}$ mit $U^\circ := \{f \in F: \sup_{t\in U} |<f,t>| \leq 1\}$.

$\mathfrak{F}_\sigma(F)$:= {C ⊂ F: C $\sigma(F,E)$-abgeschlossen}.

$\mathfrak{K}_\sigma(F)$:= {K ⊂ F: K $\sigma(F,E)$-kompakt}.

$\mathfrak{L}(F)$:= {B ⊂ F: B $\sigma(F,E)$-beschränkt und $\sigma(F,E)$-abgeschlossen}.

χ_A := charakteristische Funktion von A.

$\mathcal{C}$ A := Komplement von A.

$\overline{A}$:= abgeschlossene Hülle von $A \subset \mathbb{R}^n$.

$A^{\sigma(F,E)}$:= abgeschlossene Hülle von $A \subset F_\sigma$.

supp (t) := Träger von $t \in \mathbb{R}^{[0,1]}$.

lin (M) := lineare Hülle von M (bzgl. $\mathbb{R}$).

$\text{lin}_{\mathbb{Q}}$(M) := lineare Hülle von M (bzgl. $\mathbb{Q}$).

Topologie der $\mathfrak{Z}$-Konvergenz: (lokalkonvexe) Topologie auf E der gleichmäßigen Konvergenz auf allen zu $\mathfrak{Z}$ gehörigen Mengen (dabei ist $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{L}(F)$ mit

(1) $T_1, T_2 \in \mathcal{T} \rightarrow \exists\, T_3 \in \mathcal{T}$ so, daß $T_3 \supset T_1 \cup T_2$

(2) $T \in \mathcal{T} \rightarrow \lambda T \in \mathcal{T}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(3) $\operatorname{lin}(\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T) = F$

$\mathcal{C}(E)$:= stetige und beschränkte reelle Funktionen auf E.

$\mathcal{Z}(E) := \{f^{-1}(0) : f \in \mathcal{C}(E)\}$

Für ein Mengensystem $\mathcal{M}$ sei $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra.

$[\mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E^*,E})]^{\bar{\mu}_X}$:= Vervollständigung der σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E^*,E})$ bzgl. des Maßes $\bar{\mu}_X$.

$\mathcal{P}(\Omega)$:= Potenzmenge von Ω.

Die Banachräume $c_o([0,1])$, $l_p([0,1])$, $m([0,1])$ sind wie folgt definiert (vgl. [7], Chapter 2, § 2, Def. 1 (1)):

$c_o([0,1]) := \{t \in \mathbb{R}^{[0,1]} :$ zu jedem $\varepsilon > 0\ \exists\ I = I(\varepsilon) \subset [0,1]$ endlich so, daß $|t(x)| \leq \varepsilon\ \forall\, x \notin I\}$ mit $\|t\| := \sup_{x \in [0,1]} |t(x)|\ \forall\, t \in c_o([0,1])$

$l_p([0,1]) := \{t \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \sum_{x \in [0,1]} |t(x)|^p < \infty\}$ mit

$\|t\| := (\sum_{x \in [0,1]} |t(x)|^p)^{1/p}\ \forall\, t \in l_p([0,1])$.

$m([0,1]) := \{t \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \sup_{x \in [0,1]} |t(x)| < \infty\}$ mit

$\|t\| := \sup_{x \in [0,1]} |t(x)|\ \forall\ t \in m([0,1])$.

Unter Maß verstehen wir Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn nicht anders vereinbart. Ein Maß $\mu | \mathfrak{B}(E'_\sigma)$ heißt straff (bzw. regulär), wenn $\mu(B) = \sup\{\mu(K): B \supset K \in \mathcal{K}_\sigma(E')\}$ (bzw. $\mu(B) = \sup\{\mu(C): B \supset C \in \mathcal{F}_\sigma(E')\}\ \forall\ B \in \mathfrak{B}(E'_\sigma)$; es heißt τ-stetig, wenn für jedes nach unten gerichtete System $\{F_j : j \in J\} \subset \mathcal{F}_\sigma(E')$ gilt: $\mu(\bigcap_{j \in J} F_j) = \inf_{j \in J} \mu(F_j)$.

Der Satz von Hahn-Banach wird häufig in der folgenden Weise angewandt: Sei ein Teilraum E_o eines LTVR E gegeben; dann ist $E'_o = \{f|_{E_o} : f \in E'\}$ ($f|_{E_o}$ bezeichne die Restriktion von f auf E_o). Ist zusätzlich E_o dicht in E, so ist die durch $f \mapsto f|_{E_o}$ definierte Abbildung $\pi_{E_o} : E' \mapsto E'_o$ bijektiv; folglich darf in diesem Fall E'_o mit E' identifiziert werden.

Einleitung und Zusammenfassung.

Bereits 1953 fand E. Mourier [1] Bedingungen an die endlichdimensionalen Randverteilungen eines LSP $(X_t)_{t\in E}$, welche die Realisierbarkeit in E' charakterisierten. Dabei war E' ein separabler und reflexiver Banachraum. 1957 verallgemeinerte R.K. Getoor [13] Mourier's Ergebnisse auf den Fall reflexiver Banachräume E' und auf den Fall von Banachräumen E. Der von Getoor behandelte Typ von Realisierbarkeitsbedingungen wurde später auch von X. Fernique [10] und A.D. de Acosta [2] benutzt. Es handelt sich dabei um Bedingungen der Art, wie sie in (1.13) eingeführt werden.

Eine andere Gruppe von Realisierbarkeitsbedingungen wird abgeleitet aus einem Ergebnis von Yu. V. Prohorov [2], das wir in (1.4) aufführen; es sind dies Bedingungen der "zylindrischen Konzentriertheit" oder der "zylindrischen Quasi-Konzentriertheit" (vgl. (1.1)). Solche Realisierbarkeitsbedingungen studierte auch S. Ahmad [3]; ferner führte er Bedingungen der "schwachen zylindrischen Konzentriertheit" und der "schwachen zylindrischen Quasi-Konzentriertheit" (vgl. (1.1)) ein.

Der Zusammenhang zwischen den beiden erwähnten Arten von Realisierbarkeitsbedingungen wird in (1.17) dargestellt. Dieses Ergebnis wurde auch von A.D. de Acosta [2] erhalten; sein Beweis ist jedoch von unserem verschieden.

---

1) E. Mourier: Éléments aléatoires dans un espace de Banach, Ann. Inst. H. Poincaré 13 (1953), S. 161-224

2) Yu.V. Prohorov: The method of characteristic functionals, Proc. 4th Berkeley Symp., Vol. II (1961), S. 403-419

V. Sazonov [1] und R.A. Minlos [2] entdeckten 1958 und 1959, daß es für gewisse Klassen zugrunde liegender LTVR Realisierbarkeitsbedingungen gibt, die allein durch Stetigkeitseigenschaften der LSP ausgedrückt werden können, d.h. durch Bedingungen an die eindimensionalen Randverteilungen (vgl. (3.1) - (3.3)). Die Ergebnisse von Sazonov und Minlos wurden von A. Badrikian (vgl. [4], S. 177 ff.) und L. Schwartz (vgl. (3.5)) verallgemeinert; weitere Verallgemeinerungen findet man in den Arbeiten von A.D. de Acosta [1] und H. Millington [18].

Unsere Methode basiert nun darauf, daß zur Charakterisierung der Realisierbarkeit o.B.d.A. angenommen werden darf, daß der zugrunde liegende LTVR abzählbar-dimensional ist (vgl. (1.3)).

In § 1 behandeln wir einige hinreichende Realisierbarkeitsbedingungen, die zum Teil Abschwächungen bekannter Bedingungen sind. (1.22) liefert eine hinreichende und notwendige Realisierbarkeitsbedingung für eine recht umfangreiche Klasse zugrunde liegender LTVR.

In § 2 konstruieren wir mehrere Gegenbeispiele. (2.1) zeigt, daß die wichtigsten Klassen der in § 1 betrachteten Realisierbarkeitsbedingungen (nämlich die Bedingungen der "zylindrischen Konzentriertheit" und der "schwachen zylindrischen Konzentriertheit") tatsächlich voneinander verschieden sind. Die neuen Beispiele (2.2) und (2.3) zeigen, daß alle in § 1 betrachteten Bedingungen nicht

---

1) V. Sazonov: On characteristic functionals, Theor. Probability Appl. 3 (1958), S. 188-192.

2) R.A. Minlos: Generalized random processes and their extension to measures, Selected Transl. Math. Stat. and Prob., Amer. Math. Soc., Vol. 3 (1963), S. 291-314.

hinreichend und notwendig zugleich sind. Daher sind weitere Untersuchungen gerechtfertigt.

§ 3 behandelt Stetigkeit von LSP. In diesem Paragraphen sind (3.7) und (3.8) neu - (3.8) hauptsächlich wegen der Beweismethode.

Das Hauptergebnis in § 4 ist (4.7); es handelt sich um eine allgemein gültige hinreichende und notwendige Realisierbarkeitsbedingung. In (4.8) und (4.9) leiten wir notwendige Bedingungen aus (4.7) her. (4.11) besagt, daß diese Bedingungen nicht hinreichend sind. Eine weitere hinreichende und notwendige Bedingung wird in (4.13) diskutiert. (4.17) ist ein Schema, in dem die wichtigsten Realisierbarkeitsbedingungen verglichen werden. In (4.18) charakterisieren wir die LTVR E, für welche jeder LSP $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar ist in E'.

In (5.1) beweisen wir, daß keine einer gesamten Klasse von Bedingungen (nämlich der Bedingungen der " zylindrischen Quasi-Konzentriertheit"bzw. der"schwachen zylindrischen Quasi-Konzentriertheit") i.a. hinreichend und notwendig für Realisierbarkeit ist. Eine analoge Aussage hinsichtlich Stetigkeits- und Folgenstetigkeits-Bedingungen ist in (5.3) aufgeführt. (5.4) löst ein von H. Millington gestelltes Problem.

§ 6 behandelt Bedingungen, welche diejenigen LSP charakterisieren, die ein τ-stetiges Maß auf $\mathfrak{B}(E'_\sigma)$ erzeugen. Das Hauptergebnis dieses Paragraphen ist (6.2). In (6.3) bzw. (6.4) stellen wir fest, daß ein LSP existiert, der ein τ-stetiges, aber nicht ein straffes

Maß auf $\mathfrak{B}(E'_\sigma)$ erzeugt bzw. daß ein LSP existiert, der realisierbar ist in E', aber nicht ein τ-stetiges Maß auf $\mathfrak{B}(E'_\sigma)$ erzeugt.

In § 7 betrachten wir den Spezialfall, daß der zugrunde liegende LTVR der schwache Dual eines Banachraums E ist. Ist E separabel oder reflexiv, so sind hinreichende und notwendige Realisierbarkeitsbedingungen leicht herzuleiten (vgl. (7.1)). Für einen beliebigen Banachraum E erhalten wir ein neues Resultat (vgl. (7.3)); es wird mit den Methoden des Beweises von (4.7) hergeleitet. (7.4) zeigt, daß die Bedingung aus (7.3) nicht abgeschwächt werden kann.

Schließlich beweisen wir in (8.1), daß es auch unter relativ starken Voraussetzungen i.a. nicht möglich ist, einen LSP so fortzusetzen, daß Realisierbarkeit erhalten bleibt. Aus (8.2) ergibt sich, daß die Aussage von (8.1) in einem natürlichen Sinn optimal ist.

Der Autor möchte Herrn Prof. Dr. P. Gänßler seinen herzlichen Dank aussprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Unterstützung während ihrer Durchführung.

§ 1. Hinreichende Realisierbarkeitskriterien und Betrachtungen hinsichtlich ihrer Notwendigkeit.

Im folgenden (§ 1) sei E ein LTVR.

(1.1) Definition: Sei $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP, und sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E')$; dann:

(a) $(X_t)_{t\in E}$ zylindrisch konzentriert (z.k.) auf $\mathcal{M}$: $\Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M = M(\varepsilon) \in \mathcal{M}$ so, daß $Q^*_{X_S}(\pi_S(M)) \geq 1 - \varepsilon\ \forall\, S \in \mathcal{T}_E$.

(b) $(X_t)_{t\in E}$ zylindrisch quasi-konzentriert (z.q.k.) auf $\mathcal{M}$: $\Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M = M(\varepsilon) \in \mathcal{M}$ so, daß $Q_{X_S}(\overline{\pi_S(M)}) \geq 1 - \varepsilon\ \forall\, S \in \mathcal{T}_E$.

(c) $(X_t)_{t\in E}$ folgenweise zylindrisch konzentriert (f.z.k.) auf $\mathcal{M}$: $\Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M = M(\varepsilon) \in \mathcal{M}$ so, daß für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{Z}_{E',E}$ mit der Eigenschaft $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset M$ gilt:

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{o,X}(A_n) \geq 1 - \varepsilon$.

(d) $(X_t)_{t\in E}$ schwach zylindrisch konzentriert (s.z.k.) auf $\mathcal{M}$: $\Leftrightarrow$

für jedes $\varepsilon > 0$ und für jede Folge $T = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E gibt es ein $M=M(\varepsilon,T) \in \mathcal{M}$ so, daß $Q^*_{X_S}(\pi_S(M)) \geq 1-\varepsilon\ \forall\ S \in \{(t_1,\ldots,t_m) : m\in\mathbb{N}\}$.

(e) $(X_t)_{t\in E}$ schwach zylindrisch quasi-konzentriert (s.z.q.k.) auf $\mathcal{M}$: $\Leftrightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ und für jede Folge $T = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E gibt es ein $M=M(\varepsilon,T) \in \mathcal{M}$ so, daß $Q_{X_S}(\overline{\pi_S(M)}) \geq 1 - \varepsilon$ $\forall\ S \in \{(t_1,\ldots,t_m) : m\in\mathbb{N}\}$.

(1.2) Bemerkung: Die Fälle "z.q.k. auf $\mathcal{L}(E')$" und "s.z.q.k. auf $\mathcal{L}(E')$" wurden von S. Ahmad [3], die Fälle "z.k. auf $\mathcal{K}_\sigma(E')$" und "z.k. auf $\mathcal{U}^\circ(E')$" von L. Schwartz [22] betrachtet.

(1.3) Satz: Sei $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP; dann:
$(X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E' $\Leftrightarrow$ $(X_t)_{t\in D}$ ist realisierbar in D' für jedes $D \in \mathcal{D}_E$.

Beweis: " $\Rightarrow$ " : Sei $D \in \mathcal{D}_E$, und sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{Z}_{D',D}$ so, daß $A_n \to D'$. Dann ist $A_n' := \{f\in E' : f|_D \in A_n\}$ eine Folge in $\mathcal{Z}_{E',E}$ so, daß $A_n' \to E'$. Folglich $\mu_{o,X_E}(A_n') \to 1$; also $\mu_{o,X_D}(A_n) \to 1$, da $\mu_{o,X_E}(A_n') = \mu_{o,X_D}(A_n)$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, wie man leicht sieht.

" $\Leftarrow$ " : Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{Z}_{E',E}$ so, daß $A_n \to E'$. Es gibt ein $D \in \mathcal{D}_E$ so, daß D sämtliche von den A_n ($n\in\mathbb{N}$) bestimmten Koordinaten enthält; dann ist $A_n' := \{f|_D : f\in A_n\} \subset D'$, $n\in\mathbb{N}$, eine Folge in $\mathcal{Z}_{D',D}$ mit $A_n' \to D'$ (letzteres gilt infolge des Satzes von Hahn-Banach). Folglich $\mu_{o,X_D}(A_n') \to 1$; also $\mu_{o,X_E}(A_n) \to 1$, da $\mu_{o,X_E}(A_n) = \mu_{o,X_D}(A_n')$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, wie man leicht sieht.

(1.4) Satz: Sei $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP; dann:
$(X_t)_{t\in E}$ ist z.k. auf $\mathcal{K}_\sigma(E')$ $\Leftrightarrow$ $\mu_{o,X}$ ist eindeutig fortsetzbar zu einem straffen Maß μ auf $\mathcal{B}(E'_\sigma)$.

Beweis: (1.4) ist ein Spezialfall eines bekannten Satzes von Prohorov (vgl. [22], Part I, Chapter I, Theorem 22). Ein direkter Beweis ist gegeben in [9], Theorem 1.

(1.5) Korollar: $(X_t)_{t\in E}$ ist z.k. auf $\mathfrak{K}_\sigma(E') \succ (X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E'.

Beweis: Man beachte, daß $\mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E',E}) \subset \mathfrak{B}(E'_\sigma)$.

(1.6) Korollar: Sei E'_σ ein Suslin-Raum, d.h. surjektives stetiges Bild eines polnischen Raumes; dann:

$(X_t)_{t\in E}$ ist z.k. auf $\mathfrak{K}_\sigma(E') \overset{\times}{\succ} (X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E'.

Beweis: Nach [4], Exp. no 8, Th. 6 sowie Prop. 15, Corollaire, gilt: $\mathfrak{B}(E'_\sigma) = \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E',E})$, und jedes Maß auf $\mathfrak{B}(E'_\sigma)$ ist straff. Damit folgt die Behauptung aus (1.4).

(1.7) Definition: Sei $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP; dann:

(a) $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt die Bedingung K'(E) : $\overset{\times}{\succ} (X_t)_{t\in D}$ ist z.k. auf $\mathfrak{K}_\sigma(D')$ $\forall$ $D \in \mathcal{D}_E$.

(b) $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt die Bedingung G'(E) : $\overset{\times}{\succ} (X_t)_{t\in D}$ ist z.k. auf $\mathcal{U}^\circ(D')$ $\forall$ $D \in \mathcal{D}_E$

(mit $\mathcal{U}^\circ(D') := \{\{f \in D' : \sup_{t\in D\cap U} |\langle f,t\rangle| \leq 1\} : U \in \mathcal{U}\}$).

(1.8) Satz: $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt K'(E) $\succ$ $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar in E'.

Beweis: Man kombiniere (1.3) mit (1.5).

(1.9) Satz: $(X_t)_{t\in E}$ ist s.z.k. auf $\mathfrak{K}_\sigma(E')$ $\succ$ $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt K'(E).

Beweis: Sei $D \in \mathfrak{D}_E$, und sei $\{t_i : i\in\mathbb{N}\}$ eine Hamel-Basis von D. Da $(X_t)_{t\in E}$ s.z.k. ist auf $\mathfrak{K}_\sigma(E')$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K = K(\varepsilon) \in \mathfrak{K}_\sigma(E')$ so, daß

$$(*)\quad \mu_{o,X_E}(\{f\in E': (\langle f,t_1\rangle,\ldots,\langle f,t_m\rangle)\in \pi_{(t_1,\ldots,t_m)}(K)\}) \geq 1-\varepsilon \quad \forall\, m\in\mathbb{N}.$$

Aufgrund der Stetigkeit von $\pi_D : E'_\sigma \mapsto D'_\sigma$, $f \mapsto f|_D$ ist $K|_D := \{f|_D : f\in K\} \subset D'$ $\sigma(D',D)$-kompakt. Aus (*) folgt:

$$\mu_{o,X_D}(\{f\in D': (\langle f,t_1\rangle,\ldots,\langle f,t_m\rangle) \in \pi_{(t_1,\ldots,t_m)}(K|_D)\}) \geq 1-\varepsilon \quad \forall\, m\in\mathbb{N},$$

also $Q_{X_S}(\pi_S(K|_D)) \geq 1-\varepsilon \quad \forall\, S\in\mathfrak{F}_D$. Da $D\in\mathfrak{D}_E$ beliebig war, erfüllt $(X_t)_{t\in E}$ die Bedingung K'(E).

(1.10) Satz: $(X_t)_{t\in E}$ ist s.z.k. auf $\mathfrak{U}^\circ(E')$ $\not\succ$ $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt G'(E).

Beweis: Als Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach erhält man

$$(**)\quad \{f\in D': f\in (D\cap U)^\circ\} = \{f|_D : f\in U^\circ\} \quad \forall\, D\in\mathfrak{D}_E,\ \forall\, U\in\mathfrak{U}.$$

" $\succ$ " : Analog zum Beweis von (1.9) unter Verwendung von (**)

" $\not\succ$ " : $(X_t)_{t\in E}$ erfülle G'(E); $T := (t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in E. Dann gibt es zu $D := \mathrm{lin}(\{t_i : i\in\mathbb{N}\})$ und $\varepsilon > 0$ ein $U\in\mathfrak{U}$ so, daß $Q_{X_S}(\pi_S((D\cap U)^\circ)) \geq 1-\varepsilon \quad \forall\, S\in\mathfrak{F}_D$. Folglich gilt wegen (**): $Q_{X_S}(\pi_S(U^\circ)) \geq 1-\varepsilon \quad \forall\, S\in\{(t_1,\ldots,t_m): m\in\mathbb{N}\}$. Also ist $(X_t)_{t\in E}$ s.z.k. auf $\mathfrak{U}^\circ(E')$.

(1.11) Satz:

(a) $(X_t)_{t\in E}$ ist z.k. (bzw. s.z.k.) auf $\mathfrak{U}^\circ(E') \rangle (X_t)_{t\in E}$ ist z.k. (bzw. s.z.k.) auf $\mathfrak{K}_\sigma(E')$.

(b) $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt $G'(E) \rangle (X_t)_{t\in E}$ erfüllt $K'(E)$.

Beweis: Anwendung des Satzes von Alaoglu-Bourbaki.

(1.12) Satz: Sei E tonneliert; dann:

$(X_t)_{t\in E}$ ist z.q.k. (bzw. s.z.q.k.) auf $\mathfrak{S}(E')$ $\forall$

$(X_t)_{t\in E}$ ist z.k. (bzw. s.z.k.) auf $\mathfrak{K}_\sigma(E')$ $\forall$

$(X_t)_{t\in E}$ ist z.k. (bzw. s.z.k.) auf $\mathfrak{U}^\circ(E')$.

Beweis: Man beachte, daß im Dual eines tonnelierten Raumes jede beschränkte Menge gleichgradig stetig ist (vgl. [21], S. 127).

(1.13) Definition: (vgl. [10], II. 3.2.)

(a) $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt die Bedingung $C(E)$: $\forall$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U = U(\varepsilon) \in \mathfrak{U}$ so, daß $P(\{\omega\in\Omega: \max_{1\le i\le n} |X_{t_i}(\omega)| \le 1\}) \ge 1-\varepsilon\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, t_i \in U$.

(b) $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt die Bedingung $C'(E)$: $\forall$ $(X_t)_{t\in D}$ erfüllt die Bedingung $C(D)$ $\forall$ $D \in \mathfrak{D}_E$.

(1.14) Satz: $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt $C'(E) \rangle (X_t)_{t\in E}$ realisierbar in E'.

Beweis: Analog zum Beweis von [13], Th. 3 (anstelle von separablen Teilräumen von E betrachte man abzählbar-dimensionale Teilräume von E). Die Verallgemeinerung von einem Banach-Raum auf einen beliebigen LTVR ist leicht durchzuführen.

(1.15) Bemerkung: In [13], Th. 3, ist bewiesen, daß für einen Banach-Raum E folgendes gilt:

(1.16) $\left\{ \begin{array}{l} (X_t)_{t\in E} \text{ ist realisierbar in } E' \not\Leftrightarrow (X_t)_{t\in E} \text{ erfüllt die} \\ \text{Bedingung } C_G^B(E), \text{ d.h. für jeden separablen Teilraum S} \\ \text{von E und für alle } \varepsilon > 0,\ \eta > 0 \text{ gibt es ein} \\ \delta = \delta(\varepsilon,\eta) > 0 \text{ so, daß } P(\{\omega\in\Omega: \max\limits_{1\le i\le n} |X_{t_i}(\omega)| \le \varepsilon\}) \ge 1-\eta \\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ t_i\in S \text{ mit } \|t_i\| \le \delta. \end{array} \right.$

Offensichtlich ist in (1.16) o.B.D.A. $\varepsilon = 1$ annehmbar.

Nun ist in [13], § 1, bemerkt, daß (1.16) auf einen beliebigen LTVR E übertragbar ist, d.h. ein LSP $(X_t)_{t\in E}$ ist genau dann realisierbar in E', wenn für jeden separablen Teilraum S von E und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $U = U(S,\varepsilon) \in \mathcal{U}$ existiert so, daß

$$P(\{\omega\in\Omega: \max_{1\le i\le n} |X_{t_i}(\omega)| \le 1\}) \ge 1-\varepsilon \quad \forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ t_i\in U\cap S.$$

Nennen wir diese Bedingung $C_G(E)$. Da $C_G(E)$ stärker ist als C'(E), würde aus (1.14) folgen, daß ein LSP $(X_t)_{t\in E}$ genau dann realisierbar ist in E', wenn er C'(E) erfüllt.
Diese Aussage ist jedoch falsch, wie man durch Kombination von (1.17), (1.11) und (2.2) sieht (man beachte, daß C'(E) mit C(E) zusammenfällt, wenn E abzählbar-dimensional ist).

(1.17) Satz: (vgl. [2], Theorem 5.3)
$(X_t)_{t\in E}$ erfüllt die Bedingung C(E) $\not\Leftrightarrow$ $(X_t)_{t\in E}$ ist z.k. auf $\mathcal{U}^\circ(E')$.

Beweis: " $\prec$ " : Da $\forall\ U\in\mathcal{U}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\forall\ t_i\in U$ gilt:

$$P(\{\omega \in \Omega: \max_{1\le i\le n} |X_{t_i}(\omega)| \le 1\}) \ge$$

$$\ge P(\{\omega\in\Omega: (X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_n}(\omega)) \in \pi_{(t_1,\dots,t_n)}(U^\circ)\}),$$

folgt die Behauptung.

" $\rangle$ " : Sei $S = (t_1,\dots,t_n) \in \mathcal{T}_E$, $\varepsilon > 0$, und sei $T' := (t'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine dichte Folge in $M := \operatorname{lin}(\{t_1,\dots,t_n\})$. Nach (1.14) ist $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar in E' (man beachte, daß $C(E)$ stärker ist als $C'(E)$). Folglich gibt es ein $U = U(\varepsilon) \in \mathcal{U}$ so, daß

$$1 - \varepsilon \le \mu_X(\{f\in E' : \sup_{t\in T'\cap U} |\langle f,t\rangle| \le 1\})$$

$$= \mu_X(\{f\in E' : \sup_{t\in M\cap U} |\langle f,t\rangle| \le 1\}) = \mu_X(\{f\in E': f|_M \in (M\cap U)^\circ\})$$

$$\le \mu_{o,X}(\{f\in E': (\langle f,t_1\rangle,\dots,\langle f,t_n\rangle) \in \pi_{(t_1,\dots,t_n)}(U^\circ)\}).$$

Die letzte Ungleichung gilt, da aufgrund des Satzes von Hahn-Banach jedes $f|_M \in (M\cap U)^\circ$ fortsetzbar ist zu einem $g\in U^\circ$.
Da U nicht von $S \in \mathcal{T}_E$ abhängt, ist der Beweis vollständig.

(1.18) Korollar: $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt $C'(E)$ $\not\Leftrightarrow$ $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt $G'(E)$.

Beweis: Offensichtlich.

(1.19) Korollar: $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt $C(E)$ $\rangle$ $\mu_{o,X}$ ist eindeutig fortsetzbar zu einem straffen Maß $\mu|\mathfrak{B}(E'_\sigma)$.
Ferner gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $U = U(\varepsilon)\in \mathcal{U}$ so, daß $\mu(U^\circ) \ge 1 - \varepsilon$.

Beweis: Der erste Teil ergibt sich aus (1.17), (1.11) und (1.4).

Da $\mu | \mathfrak{B}(E'_\sigma)$ τ-stetig ist, gilt:

$$\mu(U^\circ) = \inf_{\{(t_1,\ldots,t_n : n\in\mathbb{N}, t_i \in U\}} \mu(\{f\in E' : \max_{1\le i\le n} |<f,t_i>| \le 1\}) \ge 1-\varepsilon ,$$

wobei $U = U(\varepsilon)$ gemäß der Bedingung C(E) gewählt ist.

(1.20) Proposition: Sei E ein metrisierbarer LTVR, $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP; dann:

$(X_t)_{t\in E}$ realisierbar in E' $\Rightarrow$ $(X_t)_{t\in E}$ erfüllt C(E).

Beweis: Sei $\mathfrak{U} := \{U_n : n\in\mathbb{N}\}$ eine Nullumgebungsbasis von E so, daß $U_n \supset U_{n+1}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$. Dann: $T_n := \{f\in E' : \sup_{t\in U_n} |<f,t>| \ge 1\} \neq \emptyset$,

also $(\mu_X)_*(T_n) \neq 0$. Folglich gilt: $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $n = n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ so, daß

$$P(\{\omega\in\Omega : \max_{1\le i\le m} |X_{t_i}(\omega)| \ge 1\}) = \mu_{o,X}(\{f\in E' : \max_{1\le i\le m} |<f,t_i>| \ge 1\})$$

$$\le (\mu_X)_*(T_n) \le \varepsilon \quad \forall\ m\in\mathbb{N},\ \forall\ t_i \in U_n.$$

$(X_t)_{t\in E}$ erfüllt somit C(E).

(1.21) Proposition: Sei E der induktive Limes einer Folge von LTVR $E_n \subset E$, d.h. E trägt die feinste lokalkonvexe Topologie derart, daß die kanonische Einbettung von E_n in E stetig ist für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt:

$(X_t)_{t\in E}$ erfüllt C(E) $\not\Leftarrow$ $(X_t)_{t\in E_n}$ erfüllt $C(E_n)$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

Beweis: (vgl. [10], S. 43 (Remarque))

" $\Rightarrow$ " : Offensichtlich, da $E_n \cap U$ Nullumgebung in E_n ist, falls U Nullumgebung in E ist.

" $\leq$ " : Sei $\varepsilon > 0$. Da $(X_t)_{t\in E_n}$ $C(E_n)$ erfüllt, gibt es eine Nullumgebung U_n in E_n so, daß

$$P(\{\omega\in\Omega: \max_{1\leq i\leq p} |X_{t_i}(\omega)| \geq 2^{-n}\}) \leq \varepsilon \cdot 2^{-n} \quad \forall\, p\in\mathbb{N}, \forall\, t_i \in U_n.$$

Sei $U := \{\phi_1 + \ldots + \phi_k : k \geq 1, \phi_i \in U_i\}$; dann ist U eine Nullumgebung in E, da $U \cap E_n \supset U_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

Sei $\psi_1,\ldots,\psi_l \in U$; dann gibt es ein $k_o\in\mathbb{N}$ und $\phi_{ij}\in U_j$ so, daß $\psi_i = \sum_{j=1}^{k_o} \phi_{ij}$ $(1 \leq i \leq l)$. Man erhält nun:

$$P(\{\max_{1\leq i\leq l} |X_{\psi_i}| \geq 1\}) = P(\{\max_{1\leq i\leq l} |\sum_{j=1}^{k_o} X_{\phi_{ij}}| \geq 1\})$$

$$\leq P(\{\max_{1\leq i\leq l} \sum_{j=1}^{k_o} |X_{\phi_{ij}}| \geq 1\}) \leq P(\{\sum_{j=1}^{k_o} \max_{1\leq i\leq l} |X_{\phi_{ij}}| \geq 1\})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_o} P(\{\max_{1\leq i\leq l} |X_{\phi_{ij}}| \geq 2^{-j}\}) \leq \sum_{j=1}^{k_o} \varepsilon \cdot 2^{-j} \leq \varepsilon.$$

$(X_t)_{t\in E}$ erfüllt somit $C(E)$.

(1.22) Satz: Es mögen die Voraussetzungen von (1.21) gelten. Zusätzlich seien die E_n $(n\in\mathbb{N})$ metrisierbar; dann:
$(X_t)_{t\in E}$ erfüllt $C(E)$ $\Leftrightarrow$ $(X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E'.

Beweis: " $\geq$ " : s. (1.14)

" $\leq$ " : Da $\pi_{E_n} : E' \mapsto E'_n$, $f \mapsto f|_{E_n}$, $\mathcal{A}(\mathfrak{Z} E', E') - \mathcal{A}(\mathfrak{Z} E'_n, E_n)$-meßbar ist, ist $\mu_n := \pi_{E_n}(\mu_X)$ ein Maß auf $\mathcal{A}(\mathfrak{Z} E'_n, E_n)$.

Offensichtlich ist das zu $(X_t)_{t\in E_n}$ gehörige zylindrische Maß in E_n' $\mu_n | \mathfrak{Z}_{E_n',E_n}$. Also ist $(X_t)_{t\in E_n}$ realisierbar in E_n'. Folglich erfüllt $(X_t)_{t\in E_n}$ wegen (1.20) $C(E_n)$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$. Aufgrund von (1.21) erfüllt $(X_t)_{t\in E}$ $C(E)$.

(1.23) Korollar: Es mögen die Voraussetzungen von (1.22) gelten. Sei $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar in E'; dann ist $\mu_{o,X}$ eindeutig fortsetzbar zu einem straffen Maß $\mu | \mathfrak{B}(E_\sigma')$.
Ferner gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $U = U(\varepsilon) \in \mathcal{U}$ so, daß $\mu(U^\circ) \geq 1 - \varepsilon$. Ist zusätzlich E separabel, so ist $U^\circ \in \mathcal{A}(\mathfrak{Z}_{E',E})$ $\forall$ $U \in \mathcal{U}$.

Beweis: Kombination von (1.22) mit (1.19).
Ist $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in E dichte Folge, so ist

$$U^\circ = \{f\in E' : \sup_{n\in\mathbb{N}, t_n\in U} |\langle f,t_n\rangle| \leq 1\} \in \mathcal{A}(\mathfrak{Z}_{E',E}) \quad \forall\ U\in\mathcal{U}.$$

(1.24) Bemerkung: (1.23) ist mit anderen Methoden bewiesen in [11], Satz 1.7, und zwar im Fall $E = \mathcal{D}$ (d.h. der Gesamtheit aller reellen unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, versehen mit der üblichen Topologie).

Ist E separabel (was im Fall $E = \mathcal{D}$ richtig ist), so kann der Beweis von (1.23) in der folgenden Weise vereinfacht werden:

Sei $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar in E'; nach (1.22) erfüllt $(X_t)_{t\in E}$ $C(E)$; und daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $U = U(\varepsilon) \in \mathcal{U}$ so, daß

$$\mu_X(U^\circ) = \mu_X(\{f \in E' : \sup_{n \in \mathbb{N}, t_n \in U} |\langle f, t_n\rangle| \leq 1\})$$

$$= \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu_X(\{f \in E' : \max_{1 \leq i \leq m, t_i \in U} |\langle f, t_i\rangle| \leq 1\}) \geq 1 - \varepsilon,$$

wobei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in E dichte Folge ist.

Also ist $(X_t)_{t \in E}$ z.k. auf $\mathcal{U}^\circ(E')$, daher auf $\mathcal{K}_\sigma(E')$, und (1.4) ist anwendbar.

(1.25) Definition: Sei $(X_t)_{t \in E}$ ein LSP; dann:
$(X_t)_{t \in E}$ erfüllt die Bedingung (O): $\not\forall \exists$ $U \in \mathcal{U}$, Konstanten $\gamma \geq 0$, $\alpha > 1$ und $f \in E'$ so, daß

$$P(\{\omega \in \Omega : |X_t(\omega)| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon^{-\gamma} |\langle f, t\rangle|^\alpha \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, t \in U.$$

(1.26) Bemerkung: Aufgrund der Tschebyscheff-Ungleichung ist die Bedingung (O) schwächer als

$$(O') \quad \mathbb{E}(|X_t|^\gamma) \leq |\langle f, t\rangle|^\alpha \quad \forall\ t \in U.$$

(1.27) Satz: $(X_t)_{t \in E}$ erfüllt (O) $\Rightarrow$ $(X_t)_{t \in E}$ erfüllt C(E).

Beweis: $(X_t)_{t \in E}$ erfülle (O). Sei $V \in \mathcal{U}$ so, daß $V + V \subset U$, und sei $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset V$ $(m \in \mathbb{N})$. Die t_i seien derart geordnet, daß $\langle f, t_1\rangle \leq \ldots \leq \langle f, t_m\rangle$. Es sei $Y_i := X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ $(1 \leq i \leq m)$ mit $X_{t_o} := 0$. Dann ist $X_{t_k} = \sum_{i=1}^{k} Y_i$ $(1 \leq k \leq m)$, und für jedes $\lambda > 0$ gilt:

$$P(\{|X_{t_l} - X_{t_i}| \geq \lambda\}) = P(\{|X_{t_l - t_i}| \geq \lambda\})$$

$$\leq \lambda^{-\gamma} |\langle f, t_l - t_i\rangle|^{\alpha} = \lambda^{-\gamma} |\langle f, t_l\rangle - \langle f, t_i\rangle|^{\alpha}$$

$$\leq \lambda^{-\gamma} \Big(\sum_{i<k\leq l} u_k \Big)^{\alpha} \text{ , wobei } 0 \leq i \leq l \leq m,\ u_1 := |\langle f, t_1\rangle|,$$

$u_k := \langle f, t_k\rangle - \langle f, t_{k-1}\rangle \geq 0$ für $k=2,\ldots,m$.

Somit sind die Voraussetzungen von [6], Th. 12.2, erfüllt (mit $S_1 := X_{t_1}$). Eine Anwendung dieses Theorems ergibt die Existenz eines $K = K(\alpha, \gamma)$ so, daß

$$P(\{\max_{0\leq k\leq m} |X_{t_k}| \geq 1\}) \leq K(\langle f, t_m\rangle - \langle f, t_1\rangle + |\langle f, t_1\rangle|)^{\alpha}$$

$$\leq K(3 \sup_{t\in V} |\langle f, t\rangle|)^{\alpha}.$$

Wegen der Stetigkeit von f gibt es ein $W = W(\varepsilon) \in \mathcal{U}$ so, daß $W \subset V$ und $K(3 \sup_{t\in W} |\langle f, t\rangle|)^{\alpha} \leq \varepsilon$.

Ersetzen wir in obiger Argumentation V durch W, so ergibt sich:

$$P(\{\max_{1\leq i\leq m} |X_{t_i}| \geq 1\}) \leq \varepsilon \quad \forall\ m \in \mathbb{N},\ \forall\ t_i \in W, \text{ w.z.b.w. .}$$

(1.28) Bemerkung: Im Fall $E := \mathbb{R}$ ist (1.27) nicht umkehrbar. Ein geeignetes Beispiel läßt sich konstruieren mit den Ideen in [14], Beispiel 2.11.

§ 2. Einige Gegenbeispiele.

In diesem Abschnitt werden wir häufig die lokalkonvexe direkte Summe $\bigoplus_{x \in [0,1]} \mathbb{R}_x$ und das topologische Produkt $\prod_{x \in [0,1]} \mathbb{R}_x = \mathbb{R}^{[0,1]}$ ($\mathbb{R}_x := \mathbb{R}$) betrachten. Bekanntlich ist $(\bigoplus_{x \in [0,1]} \mathbb{R}_x)' = \mathbb{R}^{[0,1]}$ und $(\mathbb{R}^{[0,1]})' = \bigoplus_{x \in [0,1]} \mathbb{R}_x$, wobei die Dualität $< \bigoplus_{x \in [0,1]} \mathbb{R}_x, \mathbb{R}^{[0,1]} >$ gegeben ist durch

$$<f,t> := \sum_{x \in [0,1]} f(x) \cdot t(x) \quad \forall\, f \in \bigoplus_{x \in [0,1]} \mathbb{R}_x, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^{[0,1]}.$$

(2.1) Satz: Es gibt einen reflexiven LTVR E und einen LSP $(X_t)_{t \in E}$ so, daß folgendes gilt:

(a) $(X_t)_{t \in E}$ ist s.z.k. auf $\mathcal{U}^\circ(E')$

(b) $(X_t)_{t \in E}$ ist nicht z.q.k. auf $\mathcal{L}(E')$.

Beweis: Es sei $E := \bigoplus_{x \in [0,1]} \mathbb{R}_x$ mit $\mathbb{R}_x := \mathbb{R}$. Als lokalkonvexe direkte Summe reflexiver Räume ist E reflexiv (vgl. [21], S. 146); zu jedem $X_{\{x\}}$ ($x \in [0,1]$) konstruiere man eine Zufallsvariable $X_{X_{\{x\}}}$ so, daß die $X_{X_{\{x\}}}$ unabhängig $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt sind. Da die $X_{\{x\}}$, $x \in [0,1]$, eine Hamel-Basis von E bilden, bestimmen die $X_{X_{\{x\}}}$ einen LSP $(X_t)_{t \in E}$. Aufgrund der Identifizierung

$(E', \mathcal{A}(\tau_{E',E})) = (\mathbb{R}^{[0,1]}, \bigotimes_{x \in [0,1]} \mathfrak{B}_x)$ mit $\mathfrak{B}_x := \mathfrak{B}$ ist

$(X_t)_{t\in E}$ realisierbar in E', und es ist $\mu_X = \bigotimes_{x\in[0,1]} \mu_x$ mit $\mu_x = \mathcal{N}(0,1)$.

ad (a): O.B.d.A. betrachte man eine Folge $(\chi_{\{x_n\}})_{n\in\mathbb{N}}$ in E, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $[0,1]$ ist. Zu $\varepsilon > 0$ betrachte man kompakte Intervalle $K_{x_n} = K_{x_n}(\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ so, daß $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mu_{x_n}(K_{x_n}) \geq 1 - \varepsilon$. Es sei $K := \prod_{x\in[0,1]} K_x$, wobei $K_x := \{0\}$ für $x \notin \{x_n : n\in\mathbb{N}\}$. K ist beschränkt in E'_σ; da E tonneliert ist, gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ so, daß $K \subset U^\circ$. Folglich gilt:

$$\mu_X(\{f\in E' : (\langle f,\chi_{x_1}\rangle,\ldots,\langle f,\chi_{x_m}\rangle)\in \pi_{(\chi_{x_1},\ldots,\chi_{x_m})}(U^\circ)\})$$
$$\geq \prod_{n=1}^{m} \mu_{x_n}(K_{x_n}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall\, m\in\mathbb{N}, \text{ w.z.b.w.}.$$

ad (b): Angenommen $(X_t)_{t\in E}$ ist z.q.k. auf $\mathcal{L}(E')$; dann gibt es zu jedem $\varepsilon\in]0,1[$ und jedem $x\in[0,1]$ ein kompaktes Intervall $K_x = K_x(\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ so, daß $\alpha_{x_1,\ldots,x_m} := \prod_{k=1}^{m} \mu_{x_k}(K_{x_k}) \geq 1 - \varepsilon > 0$

$\forall\, m\in\mathbb{N}$, $\forall\, x_k \in [0,1]$ p.v.; also $\beta := \inf_{m\in\mathbb{N}, x_k\in[0,1] \text{ p.v.}} \alpha_{x_1,\ldots,x_m} \geq$

$\geq 1 - \varepsilon > 0$.

Sei nun $\beta_n := \alpha_{x_1(n),\ldots,x_{m(n)}(n)}$ so, daß $\beta_n \downarrow \beta$, und sei

$x_o \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_1(n),\ldots,x_{m(n)}(n)\}$; dann:

$$\beta \leq \alpha_{x_o,x_1(n),\ldots,x_{m(n)}(n)} = \mu_{x_o}(K_{x_o})\cdot\beta_n \downarrow \mu_{x_o}(K_{x_o})\cdot\beta < \beta, \text{ Wdspr.}$$

(da $\mu_{x_o}(K_{x_o}) < 1$).

(2.2) Satz: Es gibt einen abzählbar-dimensionalen LTVR E und einen LSP $(X_t)_{t\in E}$ so, daß folgendes gilt:

(a) $(X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E'

(b) $(X_t)_{t\in E}$ ist nicht z.k. auf $\mathcal{K}_\sigma(E')$.

Beweis: Man betrachte den W-Raum $([0,1],\mathfrak{B}_{[0,1]},\lambda)$, wobei $\mathfrak{B}_{[0,1]}$ die Borel-Mengen in $[0,1]$ und λ das Lebesgue-Maß bezeichnen. Bekanntlich gibt es ein $B \subset [0,1]$ so, daß $\lambda_*(B) = 0$, $\lambda^*(B) = 1$ und ein Maß $\tilde{\lambda}$ auf $([0,1], \mathcal{A}(\mathfrak{B}_{[0,1]} \cup \{B\}))$ so, daß $\tilde{\lambda}(A) = \lambda(A)$ $\forall$ $A \in \mathfrak{B}_{[0,1]}$ und $\tilde{\lambda}(B) = 1$.

Wir konstruieren nun E. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\varepsilon > 0$ und zu jedem $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ sei $t_{q,\varepsilon} \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ definiert durch

$$t_{q,\varepsilon}(x) := \begin{cases} \varepsilon^{-1}(x-q+\varepsilon) & \forall\ x \in [q-\varepsilon, q] \cap [0,1] \\ \varepsilon^{-1}(q+\varepsilon-x) & \forall\ x \in [q, q+\varepsilon] \cap [0,1] \\ 0 & \forall\ x \notin]q-\varepsilon, q+\varepsilon[\cap [0,1] \end{cases}$$

Sei $(t'_k)_{k\geq 2}$ eine Abzählung von $T := \{t_{q,\varepsilon} : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ \mathbb{Q} \ni \varepsilon > 0\}$, und sei $t'_1 := \chi_B \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. Wir definieren nun $E := \mathrm{lin}(T \cup \{t'_1\}) \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$ und versehen E mit der von der Produkttopologie τ_p von $\mathbb{R}^{[0,1]}$ induzierten Topologie. Man sieht leicht, daß $\mathrm{lin}(T)$ und damit E bzgl. τ_p dicht in $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ist. Folglich ist $E' = \bigoplus_{x\in[0,1]} \mathbb{R}_x$ mit $\mathbb{R}_x := \mathbb{R}$.

Wir definieren nun einen LSP $(X_t)_{t\in E}$ über

$([0,1], \mathcal{A}(\mathcal{B}_{[0,1]} \cup \{B\}), \tilde{\lambda})$ durch $X_t(x) := t(x)$

$\forall\, t \in E, \forall\, x \in [0,1]$. Man beachte, daß

$$\mu_{o,X}(\{f \in E' : (\langle f,t_1\rangle,\ldots,\langle f,t_m\rangle) \in B\}) = \tilde{\lambda}(\{x \in [0,1] : (t_1(x),\ldots,t_m(x)) \in B\})$$

$\forall\, m \in \mathbb{N}, \forall\, t_i \in E, \forall\, B \in \mathcal{B}^m$.

ad (a): Man prüft leicht nach, daß $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar ist in E':

$\mathcal{Z}_{E',E} \ni A_n = \{f \in E' : (\langle f,t_1^{(n)}\rangle,\ldots,\langle f,t_{m(n)}^{(n)}\rangle) \in B(n)\} \neq \emptyset$

impliziert $A_n \cap \Delta \neq \emptyset$, wobei $\Delta := \{\delta_x : x \in [0,1]\} \subset E'$ und

$\langle \delta_x, t\rangle := t(x) \quad \forall\, t \in E$. Folglich gilt

$\{x \in [0,1] : (t_1^{(n)}(x),\ldots,t_{m(n)}^{(n)}(x)) \in B(n)\} \neq \emptyset$, also

$\mu_{o,X}(A_n) = \tilde{\lambda}(\{x \in [0,1] : (t_1^{(n)}(x),\ldots,t_{m(n)}^{(n)}(x)) \in B(n)\}) \neq 0$.

ad (b): Da E abzählbar-dimensional ist, gilt: $\mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E',E}) = \mathcal{B}(E'_\sigma)$, wie in (4.1) gezeigt wird. Gemäß (1.4) ist also zu zeigen, daß $\mu_X | \mathcal{B}(E'_\sigma)$ nicht straff ist.

Für $B' := \{f \in E' : \langle f,t_1'\rangle = 1\}$ erhalten wir

$\mu_X(B') = \tilde{\lambda}(\{x \in [0,1] : t_1'(x) = 1\}) = \tilde{\lambda}(B) = 1$. Daher genügt es, zu zeigen, daß

(*) $\mu_X(K) = 0 \quad \forall\, K \in \mathcal{K}_\sigma(E')$ mit $K \subset B'$.

Wir bemerken, daß aufgrund der Definition von $\mu_{o,X}$ und wegen der eindeutigen Fortsetzbarkeit von $\mu_{o,X}$ zu μ_X auf $\mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E',E}) = \mathcal{B}(E'_\sigma)$ folgt, daß $\mu_X(A) = \tilde{\lambda}(\{x \in [0,1] : \delta_x \in A\}) \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(E'_\sigma)$.

Wir beweisen nun (*). Zunächst gilt

(**) $\Delta = \Delta^{\sigma(E',E)}$.

Beweis von (**): Sei $f \in \Delta^{\sigma(E',E)}$; dann:

$U_{\varepsilon,S} := \{x \in [0,1]: |\langle \delta_x, t_i\rangle - \langle f, t_i\rangle| \leq \varepsilon \; \forall \, 1 \leq i \leq n\} \neq \emptyset$

$\forall \, \varepsilon > 0, \; \forall \, S = (t_1,\ldots,t_n) \in \mathcal{T}_{lin\,(T)}$.

Da die Elemente von lin (T) stetig sind auf [0,1], bilden die $U_{\varepsilon,S}$ ein absteigend filtrierendes System kompakter Teilmengen von [0,1].

Folglich gilt $\bigcap_{\substack{\varepsilon>0 \\ S \in \mathcal{T}_{lin(T)}}} U_{\varepsilon,S} \neq \emptyset$, d.h.

(+) es gibt ein $x_o \in [0,1]$ so, daß $\langle \delta_{x_o}, t\rangle = \langle f, t\rangle \;\; \forall \; t \in$ lin (T).

Um den Beweis von (**) zu beenden, ist zu zeigen: $f = \delta_{x_o}$.

Wäre $f \neq \delta_{x_o}$, also $f - \delta_{x_o} \neq 0$, so gäbe es aufgrund der Dichtheit von lin (T) in E bzgl. τ_p ein $t_o \in$ lin (T) so, daß $\langle f - \delta_{x_o}, t_o\rangle \neq 0$ - im Wdspr. zu (+).

Damit ist (**) bewiesen.

Als nächstes zeigen wir

(***) $\Phi : \Delta \to [0,1]$, $\delta_x \to x$, ist stetig, wenn $\Delta \subset E'$ versehen ist mit der von E'_σ induzierten Topologie.

Beweis von (***): Sei $K_\varepsilon(y) := [0,1] \cap \,]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$, wobei $\varepsilon > 0$, $y \in [0,1]$. Es ist zu zeigen: $\Phi^{-1}(K_\varepsilon(y))$ ist offen in Δ.

Sei $\delta_{y'} \in \Phi^{-1}(K_\varepsilon(y))$, also $y' \in K_\varepsilon(y)$. Wie man leicht sieht, gibt es ein $k = k(y') \geq 2$ so, daß $t'_k(y') > 2^{-1}$ und supp $(t'_k) \subset K_\varepsilon(y)$. Folglich gilt:

$$\delta_{y'} \in \{\delta_x \in \Delta: |\langle \delta_x, t'_k\rangle - \langle \delta_{y'}, t'_k\rangle| < 2^{-1}\} \subset \Phi^{-1}(K_\varepsilon(y)).$$

Daher ist $\Phi^{-1}(K_\varepsilon(y))$ offen in Δ, und (***) ist bewiesen.

Wegen (**) ist Δ abgeschlossen in E'_σ. Also gilt:
$K \cap \Delta$ ist kompakt in Δ, falls $K \in \mathfrak{K}_\sigma(E')$ und $K \subset B'$.
Wegen (***) folgt dann:

$\{x \in [0,1]: \delta_x \in K\} = \{x \in [0,1]: \delta_x \in K \cap \Delta\}$ ist kompakt in $[0,1]$, also ein Element von $\mathfrak{B}_{[0,1]}$. Wir erhalten schließlich:

$$\mu_X(K) = \bar{\lambda}(\{x \in [0,1]: \delta_x \in K\}) = \lambda(\{x \in [0,1]: \delta_x \in K\})$$
$$\leq \lambda_*(\{x \in [0,1]: \delta_x \in B'\}) = \lambda_*(B) = 0 \quad \forall\, K \in \mathfrak{K}_\sigma(E') \text{ mit } K \subset B'.$$

Damit ist (*) bewiesen.

(2.3) Satz: Es gibt einen separablen LTVR E und einen LSP $(X_t)_{t\in E}$ so, daß folgendes gilt:

(a) $(X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E'

(b) $(X_t)_{t\in E}$ ist nicht s.z.q.k. auf $\mathfrak{L}_\mathfrak{y}(E')$.

Beweis: Es sei $E := \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]}: f \text{ ist } \mathfrak{B}_{[0,1]} - \mathfrak{B}\text{-meßbar}\}$, versehen mit der von der Produkttopologie τ_p von $\mathbb{R}^{[0,1]}$ induzierten

Topologie. E ist separabel, denn $\mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}(T)$ ist abzählbar und dicht in E, wenn T wie im Beweis von (2.2) gewählt ist. Da E bzgl. τ_p dicht in $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ist, erhalten wir $E' = \bigoplus_{x \in [0,1]} \mathbb{R}_x$ mit $\mathbb{R}_x := \mathbb{R}$.

Wir benötigen das folgende Lemma.

(2.4) Lemma: Ist $B \subset E'$ $\sigma(E',E)$-beschränkt, so gibt es eine endliche Menge $H \subset [0,1]$ so, daß $\pi_{(\chi_{\{x\}})}(B) = \{0\}$ für $x \in [0,1] \setminus H$, und $\pi_{(\chi_{\{x\}})}(B)$ ist beschränkt für $x \in H$.

Beweis von (2.4): $B \subset E'$ $\sigma(E',E)$-beschränkt $\Rightarrow B \subset E'$ $\sigma(E',\mathbb{R}^{[0,1]})$-beschränkt (da zu jedem abzählbaren $M \subset [0,1]$ ein $t \in E$ existiert, welches auf M beliebig vorgegebene Werte annimmt). Aufgrund von [21], Ch. II, 6.3 und [21], Ch. IV, 3.2, Corollary 2, folgt hieraus die Behauptung.

Um den Beweis von (2.3) zu Ende zu führen, betrachten wir den W-Raum $([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Wir definieren einen LSP $(X_t)_{t \in E}$ durch $X_t(x) := t(x)\ \forall t \in E, \forall x \in [0,1]$. Man beachte, daß

$$\mu_{0,X}(\{f \in E' : (\langle f,t_1\rangle, \ldots, \langle f,t_m\rangle) \in B\}) = \lambda(\{x \in [0,1] : (t_1(x), \ldots, t_m(x)) \in B\})$$

$\forall\ m \in \mathbb{N}, \forall\ t_i \in E, \forall\ B \in \mathfrak{B}^m$.

ad (a): (a) wird analog zu (2.2) (a) bewiesen; man ersetze lediglich $\tilde{\lambda}$ durch λ.

ad (b): Angenommen, $(X_t)_{t \in E}$ ist s.z.q.k. auf $\mathfrak{Z}(E')$. Für jedes

$l \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_l := \{A_l \subset \{1,\dots,2^l\}$: A_l besteht aus genau 2^{l-1} Elementen$\}$. Für $l \in \mathbb{N}$ und $A_l \in \mathcal{A}_l$ sei

$$t_{l,A_l} := \sum_{k \in A_l} l^{-1} \chi_{I_{l,k}} + \sum_{j \in \complement A_l} l \cdot \chi_{I_{l,j}}, \text{ wobei}$$

$I_{l,k} := [\,(k-1)\,2^{-l},\ k \cdot 2^{-l}\,[$, falls $1 \le k \le 2^l-1$, und

$I_{l,2^l} := [\,1-2^{-l},1]$. Sei $R := \{t_{l,A_l}$: $l \in \mathbb{N}$, $A_l \in \mathcal{A}_l\}$ und $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von R.

Aus der obigen Annahme folgt nun die Existenz eines $\sigma(E',E)$-beschränkten $B \subset E'$ so, daß

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{3}{4} \le \mu_{o,\chi}(\{f \in E' : \langle f,t_k\rangle \in \overline{\pi_{(t_k)}(B)}\}) \\ \quad \le \mu_{o,\chi}(\{f \in E' : |\langle f,t_k\rangle| \le n \cdot b \cdot \sup_{1 \le i \le n} |t_k(x_i)|\})\ \forall\, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dabei sei $H = \{x_1,\dots,x_n\} \subset [\,0,1]$ endlich und b eine positive reelle Zahl so, daß $\pi_{(\chi_{\{x\}})}(B) = \{0\}$ für $x \in [\,0,1] \setminus H$, und $\pi_{(\chi_{\{x\}})}(B)$ ist beschränkt durch b für $x \in H$. Die Existenz von H und b ist durch (2.4) gewährleistet.

Wir wählen nun $l \in \mathbb{N}$ so, daß folgendes gilt:

(α) $l^2 > n \cdot b$,

(β) die $x_i (1 \le i \le n)$ liegen in disjunkten Intervallen vom Typ $I_{l,k}$,

(γ) $2^{l-1} \ge n$.

Dann gibt es ein $t_{l,A_l} \in R$ so, daß $\sup_{1 \le i \le n} |t_{l,A_l}(x_i)| = l^{-1}$, und

folglich gilt:

$$\mu_{o,X}(\{f \in E' : |\langle f, t_{1,A_1}\rangle| \leq n \cdot b \cdot \sup_{1 \leq i \leq n} |t_{1,A_1}(x_i)|\})$$

$$= \lambda(\{x \in [0,1] : |t_{1,A_1}(x)| \leq n \cdot b \cdot 1^{-1}\})$$

$$\leq \lambda(\{x \in [0,1] : |t_{1,A_1}(x)| < 1\}) \leq \frac{1}{2} \text{ - im Widerspruch zu } (*).$$

§ 3. Stetigkeit von LSP und nukleare Räume.

(3.1) Definition: Sei E ein LTVR, $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E')$; dann:

$(X_t)_{t\in E}$ ist skalar konzentriert (s.k.) auf $\mathcal{M}$: $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, M = M(\varepsilon) \in \mathcal{M}$ so, daß $Q^*_{X_t}(\pi_{(t)}(M)) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall\, t \in E$.

(3.2) Satz: Sei E ein LTVR, und $\mathfrak{T} \subset \mathcal{L}(E')$ erfülle folgende Bedingungen:

(1) $T_1, T_2 \in \mathfrak{T} \;\rangle\; \exists\, T_3 \in \mathfrak{T}$ so, daß $T_3 \supset T_1 \cup T_2$

(2) $T \in \mathfrak{T} \;\rangle\; \lambda T \in \mathfrak{T}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(3) $\operatorname{lin}\left(\bigcup_{T\in\mathfrak{T}} T\right) = E'$.

Sei ferner $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP; dann gilt:

$(X_t)_{t\in E}$ ist s.k. auf $\mathfrak{T}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_X$ ist stetig auf E bzgl. der Topologie der $\mathfrak{T}$-Konvergenz.

Beweis: vgl. [4], S. 26, Theorème.

(3.3) Definition: Sei E ein topologischer Vektorraum, $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP; dann:

$(X_t)_{t\in E}$ ist stetig : $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_X$ ist stetig auf E.

(3.4) Bemerkung: Sei E ein LTVR; da $\mathfrak{U}^\circ(E')$ die Bedingungen (1), (2) und (3) von (3.2) erfüllt, und da die initiale Topologie von E überein-

stimmt mit der Topologie der $\mathfrak{U}^{\circ}(E')$-Konvergenz, ist ein LSP $(X_t)_{t\in E}$ genau dann stetig, wenn er s.k. ist auf $\mathfrak{U}^{\circ}(E')$ (vgl. (3.2)).

Den Begriff einer Prä-Hilbert-Umgebung und eines nuklearen Raumes übernehmen wir von [22], Part II, Chapter IV, 2. Eine Kombination von Theorem 2 aus Chapter IV mit Theorem 2 aus Chapter VI von [22], Part II, ergibt:

(3.5) Satz: Sei E ein LTVR; dann:

(a) E nuklear $\Rightarrow$ jeder stetige LSP $(X_t)_{t\in E}$ ist z.k. auf $\mathfrak{U}^{\circ}(E')$.

(b) Gibt es in E eine Nullumgebungsbasis, die aus Prä-Hilbert-Umgebungen besteht, dann ist (a) umkehrbar.

(3.6) Bemerkung: Jeder Teilraum des $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (versehen mit der Produkttopologie) ist nuklear (vgl. [20], 5.1.1 und 5.2.1).

(3.7) Satz: Es gibt einen abzählbar-dimensionalen nuklearen Raum E und einen LSP $(X_t)_{t\in E}$ so, daß folgendes gilt:

(a) $(X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E'

(b) $(X_t)_{t\in E}$ ist nicht stetig.

Beweis: Sei E bzw. $(X_t)_{t\in E}$ der in (2.2) konstruierte LTVR bzw. LSP. Gemäß (3.6) ist E nuklear. Wegen (3.5) (a) würde aus der Stetigkeit von $(X_t)_{t\in E}$ folgen, daß $(X_t)_{t\in E}$ z.k. ist auf $\mathfrak{U}^{\circ}(E')$, also auf $\mathfrak{K}_{\sigma}(E')$ - im Widerspruch zu (2.2) (b).

Wir geben im folgenden (Prop. (3.8)) einen neuen Beweis an für das bekannte Ergebnis (vgl. [1], Example 4.2, Corollary; vgl. [8], S. 19), daß es einen LTVR E gibt derart, daß für keine lokalkonvexe Topologie τ auf E die Stetigkeit von LSP bzgl. τ gleichbedeutend ist mit ihrer Realisierbarkeit in E'. Unser Beweis, der auf einem separablen nuklearen Raum E basiert, unterscheidet sich von den bekannten Beweisen, welche mit normierten Räumen arbeiten; ferner sind wir der Meinung, daß unser Beweis mehr in sich geschlossen ist als die oben zitierten.

(3.8) Satz: Es gibt einen separablen nuklearen Raum E mit folgender Eigenschaft:
für keine lokalkonvexe Topologie τ auf E gilt:
$(X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E' $\not\Leftrightarrow$ $(X_t)_{t\in E}$ ist stetig bzgl. τ $\forall$ LSP $(X_t)_{t\in E}$.

Beweis: Wir betrachten den in (2.3) konstruierten separablen LTVR E. Wegen (3.6) ist E nuklear. Sei nun τ_o eine beliebige lokalkonvexe Topologie auf E. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $(E, \tau_o)' =: E'_{\tau_o} \subset E'$. Dann ist τ_o gröber als $\beta(E,E')$, und zu zeigen bleibt die Existenz eines LSP $(X_t)_{t\in E}$, der in E' realisierbar, jedoch nicht $\beta(E,E')$-stetig ist.
Sei $(X_t)_{t\in E}$ der in (2.3) konstruierte LSP. Nach (2.3) (a) ist $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar in E'.

Angenommen, $(X_t)_{t\in E}$ ist $\beta(E,E')$-stetig. Dann ist $(X_t)_{t\in E}$ s.k. auf $\mathcal{L}(E')$ (vgl. (3.2)). Folglich gibt es ein $B \in \mathcal{L}(E')$ mit:

$$(*) \quad \begin{cases} 2^{-1} \leq \mu_{o,X}(\{f \in E' : \langle f,t\rangle \in \overline{\pi_{(t)}(B)}\}) \\ \leq \mu_{o,X}(\{f \in E' : |\langle f,t\rangle| \leq n \cdot b \cdot \sup\limits_{1\leq i\leq n} |t(x_i)|\}) \ \forall\ t \in E. \end{cases}$$

Dabei sei $H = \{x_1,\ldots,x_n\} \subset [0,1]$ endlich und b eine positive reelle Zahl so, daß $\pi_{(x_{\{x\}})}(B) = 0$ für $x \notin H$ und $\pi_{(x_{\{x\}})}(B)$ ist durch b beschränkt $\forall$ $x \in H$. Die Existenz von H und b ist durch (2.4) gewährleistet.

Sei nun $t_o := \chi_{C_H} \in E$; dann:

$$\mu_{o,X}(\{f \in E' : |\langle f,t_o\rangle| \leq n \cdot b \cdot \sup_{1\leq i\leq n} |t_o(x_i)|\})$$

$$= \mu_{o,X}(\{f \in E' : |\langle f,t_o\rangle| = 0\}) = \lambda(\{x \in [0,1] : |t_o(x)| = 0\})$$

$$= \lambda(H) = 0 \quad \text{- im Widerspruch zu } (*).$$

Fall 2: $\exists f_o \in E'_{\tau_o}$ so, daß $f_o \notin E'$. Wir betrachten einen LSP $(Y_t)_{t\in E}$ mit $Y_t(\omega) = \langle f_o,t\rangle$ $\forall\ t \in E$, $\forall$ $\omega \in \Omega$. Da $f_o \in E'_{\tau_o}$, ist $(Y_t)_{t\in E}$ stetig bzgl. τ_o. Also bleibt zu zeigen, daß $(Y_t)_{t\in E}$ nicht realisierbar ist in E'. Wir werden dies erreichen durch Konstruktion eines $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_{E^*,E})$ mit $\overline{\mu}_Y(A) = 1$ und $A \cap E' = \emptyset$.

Sei $\tilde{A} := \{f \in E^* : \langle f,t\rangle = \langle f_o,t\rangle \ \forall\ t \in S\}$, wobei S abzählbar und dicht in E sei. Falls $\tilde{A} \cap E' = \emptyset$, sind wir fertig. Andernfalls ist $|\tilde{A} \cap E'| = 1$, da S dicht in E ist. Da $f_o \notin E'$, gibt es zu $g \in \tilde{A} \cap E'$ ein $t_1 \in E \setminus S$ so, daß $\langle g,t_1\rangle \neq \langle f_o,t_1\rangle$. Daher ist $A \cap E' = \emptyset$ für

$A := \{f \in E^* : \langle f,t\rangle = \langle f_o,t\rangle \ \forall\ t \in S \cup \{t_1\}\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E^*,E})$. Da $f_o \in A$, ist $\overline{\mu}_Y(A) = 1$. Damit ist der Beweis von (3.8) vollständig.

§ 4. Eine hinreichende und notwendige Realisierbarkeitsbedingung.

(2.2) und (2.3) zeigen, daß sämtliche bisher betrachteten Realisierbarkeitsbedingungen nicht hinreichend und notwendig zugleich sind. In diesem Paragraphen werden wir eine Bedingung der gewünschten Art erhalten. Im folgenden (§ 4) sei D ein beliebiger abzählbar-dimensionaler LTVR und D_o sei der in (2.2) konstruierte abzählbar-dimensionale LTVR.

(4.1) Proposition:

(1) D ist separabel.

(2) $(D^*, \sigma(D^*,D))$ ist ein separabler Frechetraum.

(3) $(D', \sigma(D',D))$ ist ein separabler metrisierbarer LTVR.

(4) $\mathcal{A}(\mathcal{T}_{D^*,D}) = \mathfrak{B}(D^*_\sigma)$

(5) $\mathcal{A}(\mathcal{T}_{D',D}) = D' \cap \mathcal{A}(\mathcal{T}_{D^*,D}) = D' \cap \mathfrak{B}(D^*_\sigma) = \mathfrak{B}(D'_\sigma)$.

Beweis: (1) Sei T eine Hamel-Basis von D; dann ist $\mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}(T)$ abzählbar und dicht in D, wie man leicht sieht.

(2) Nach [17], § 20, 9. (1), ist $(D^*, \sigma(D^*,D))$ topologisch isomorph zu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, versehen mit der Produkttopologie. Da letzterer metrisierbar und separabel ist, gilt gleiches für $(D^*, \sigma(D^*,D))$. Die Vollständigkeit ergibt sich aus [17], S. 93, (5).

(3) Unmittelbare Folgerung aus (2).

(4) Folgerung aus (2) und [4], Exposé no 8, Prop. 15, Corollaire.

(5) Offensichtlich.

(4.2) Satz: Sei $(X_t)_{t\in D_o}$ der in (2.2) konstruierte LSP; dann:

$D'_o \notin [\ \mathcal{A}(\bigcup_{D_o^*, D_o})]^{\bar{\mu}_X}$, insbesondere $D'_o \notin \mathcal{A}(\bigcup_{D_o^*, D_o})$.

Beweis: Zu zeigen: $(\bar{\mu}_X)_*\ (D'_o) < (\bar{\mu}_X)^*\ (D'_o)$.

Da $(X_t)_{t\in D_o}$ realisierbar ist in D'_o, gilt $(\bar{\mu}_X)^*\ (D'_o) = 1$.

Ferner: $(\bar{\mu}_X)_*\ (D'_o) = \sup\{\bar{\mu}_X(A)\colon D'_o \supset A \in \mathcal{A}(\bigcup_{D_o^*, D_o})\}$

$= \sup\{\bar{\mu}_X(K)\colon D'_o \supset K \in \mathcal{K}_\sigma(D_o^*)\}$

$= \sup\{\mu_X(K)\colon K \in \mathcal{K}_\sigma(D'_o)\} < 1$, weil $\mathcal{A}(\bigcup_{D_o^*, D_o}) = \mathcal{B}(D^*_{o\sigma})$

und $\bar{\mu}_X \mid \mathcal{B}(D^*_{o\sigma})$ straff, $\mu_X \mid \mathcal{B}(D'_{o\sigma}) = \bar{\mu}^*_X \mid \mathcal{B}(D'_{o\sigma})$, und weil

$(X_t)_{t\in D_o}$ gemäß (2.2) nicht z.k. ist auf $\mathcal{K}_\sigma(D'_o)$.

Die folgenden Hilfssätze dienen zur Vorbereitung von (4.6).

(4.3) Hilfssatz: Sei $(X_t)_{t\in D}$ ein LSP; dann:

$\bar{\mu}^*_X(D') = 1 \not\leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ K = K(\varepsilon) \in \mathcal{K}_\sigma(D^*)$ so, daß

$\bar{\mu}^*_X(D' \cap K) \geq 1 - \varepsilon$.

Beweis: " $<$ " : $\bar{\mu}^*_X(D') \geq \bar{\mu}^*_X(D' \cap K) \geq 1-\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0 \rangle\ \bar{\mu}^*_X(D') = 1$.

" $>$ " : Nach (4.1)(2) ist D^*_σ polnisch; also gilt:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ K = K(\varepsilon) \in \mathcal{K}_\sigma(D^*)$ so, daß $\bar{\mu}_X(K) \geq 1 - \varepsilon$. Da

$\bar{\mu}^*_X(D') = 1$, folgt $\bar{\mu}^*_X(D' \cap K) = \bar{\mu}_X(K) \geq 1 - \varepsilon$.

(4.4) Hilfssatz: Sei $(X_t)_{t\in D}$ ein LSP; dann:

$\overline{\mu}_X^*(D') = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists K = K(\varepsilon) \in \mathcal{K}_\sigma(D^*)$ so, daß für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{Z}_{D^*,D}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset D' \cap K$

gilt: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}_{o,X}(A_n) \geq 1 - \varepsilon$.

Beweis: Wegen (4.3) ist zu zeigen:

$\overline{\mu}_X^*(D' \cap K) \geq 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}_{o,X}(A_n) \geq 1 - \varepsilon$ für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{Z}_{D^*,D}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset D' \cap K$.

" $\geq$ " : offensichtlich

" $\leq$ " : Sei $B \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{D^*,D})$ so, daß $B \supset D' \cap K$. Es ist zu zeigen:

$\overline{\mu}_X(B) \geq 1 - \varepsilon$.

Nach [16], Satz 9.2, gilt: $\forall \delta > 0 \; \exists A_{n,\delta} \in \mathcal{Z}_{D^*,D}$ so, daß $A_{n,\delta} \uparrow A_\delta \supset B$ und $\overline{\mu}_X(A_\delta \setminus B) < \delta$. Da $A_\delta \supset B \supset D' \cap K$, folgt:

$\overline{\mu}_X(A_\delta) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}_{o,X}(A_{n,\delta}) \geq 1 - \varepsilon \; \forall \delta > 0$.

Also: $\overline{\mu}_X(B) = \overline{\mu}_X(A_\delta) - \overline{\mu}_X(A_\delta \setminus B) > \overline{\mu}_X(A_\delta) - \delta \geq 1 - \varepsilon - \delta$

$\forall \delta > 0$, d.h. $\overline{\mu}_X(B) \geq 1 - \varepsilon$.

(4.5) Proposition: Sei $(X_t)_{t\in D}$ ein LSP; dann:

$\overline{\mu}_X^*(D') = 1 \Leftrightarrow (X_t)_{t\in D}$ ist f.z.k. auf $\mathcal{S}(D')$.

Beweis: Man beachte, daß es zu jedem $B \in \mathcal{S}(D')$ ein $K \in \mathcal{K}_\sigma(D^*)$ gibt so, daß $K \cap D' = B$, und daß andererseits $K \cap D' \in \mathcal{S}(D')$ ist für jedes $K \in \mathcal{K}_\sigma(D^*)$.

" $\lessdot$ " : folgt unmittelbar aus (4.4)

" $\gtrdot$ " : folgt aus (4.4) und der Tatsache, daß $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{Z}_{D^*,D}$ bildet, falls $(A_n \cap D')_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{Z}_{D',D}$ bildet, wobei sich letzteres aus dem Satz von Hahn-Banach ergibt.

(4.5) ist gleichwertig mit

(4.6) Satz: Sei $(X_t)_{t\in D}$ ein LSP; dann:

$(X_t)_{t\in D}$ ist realisierbar in D' $\not\gtrdot$ $(X_t)_{t\in D}$ ist f.z.k. auf $\mathcal{L}(D')$.

Indem wir (1.3) mit (4.6) kombinieren, erhalten wir folgendes Ergebnis:

(4.7) Satz: Sei E ein LTVR und $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP; dann:
$(X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E' $\not\gtrdot$ $(X_t)_{t\in D}$ ist f.z.k. auf $\mathcal{L}(D')$ $\forall$ $D \in \mathcal{D}_E$.

(4.8) Korollar: $(X_t)_{t\in D}$ realisierbar in D' $\gtrdot$ $(X_t)_{t\in D}$ z.k. auf $\mathcal{L}(D')$.

Insbesondere gilt also:
(4.9) Korollar: $(X_t)_{t\in D}$ realisierbar in D' $\gtrdot$ $(X_t)_{t\in D}$ z.q.k. auf $\mathcal{L}(D')$.

(4.10) Bemerkung: Wegen (2.3) ist (4.9) und damit auch (4.8) i.a. nicht übertragbar auf separable LTVR.

Wir zeigen nun, daß (4.8) und damit auch (4.9) nicht umkehrbar sind.

(4.11) Satz: Sei D ein abzählbar-dimensionaler LTVR so, daß $D' \neq D^*$. Dann gibt es einen LSP $(X_t)_{t\in D}$ derart, daß folgendes gilt:

(a) $(X_t)_{t\in D}$ ist nicht realisierbar in D'.

(b) $(X_t)_{t\in D}$ ist z.k. auf $\mathcal{L}_\tau(D')$.

Beweis: Sei $\{t_i' : i\in\mathbb{N}\}$ eine Hamel-Basis von D, und sei $f_o \in D^* \setminus D'$. Sei $(X_t)_{t\in D}$ ein LSP so, daß $X_t(\omega) := \langle f_o, t\rangle \ \forall\, \omega\in\Omega, \forall\, t\in D$.

ad (a): $\overline{\mu}_X(\{f_o\}) = \overline{\mu}_X\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f\in D^*: \langle f,t_i'\rangle = \langle f_o,t_i'\rangle\}\big) = 1$

$\Rightarrow \overline{\mu}_X^*(D') \leq \overline{\mu}_X^*(D^*\setminus\{f_o\}) = \overline{\mu}_X(D^*\setminus\{f_o\}) = 0$, d.h. es gilt (a).

ad (b): Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $f_n\in D'$ so, daß $(\langle f_n,t_1'\rangle,\ldots,\langle f_n,t_n'\rangle) = (\langle f_o,t_1'\rangle,\ldots,\langle f_o,t_n'\rangle)$.

Also $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_o$ in D_σ^* und folglich $\{f_n: n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\} \in \mathcal{K}_\sigma(D^*)$.

Daher ist $M := \{f_n: n\in\mathbb{N}\} = D' \cap \{f_n: n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\} \in \mathcal{L}_\tau(D')$.

Für jedes $S = (t_1,\ldots,t_m) \in \mathcal{Y}_D$ und $B\in\mathcal{B}^m$ mit $B \supset \pi_S(M)$ ergibt sich: $Q_{X_S}(B) \geq Q_{X_S}(\{(\langle f_o,t_1\rangle,\ldots,\langle f_o,t_m\rangle)\}) = 1$, d.h. $Q_{X_S}^*(\pi_S(M)) = 1 \ \forall\, S\in\mathcal{Y}_D$. Also ist $(X_t)_{t\in D}$ z.k. auf $\mathcal{L}_\tau(D')$.

(4.12) Bemerkung: D_o erfüllt die Voraussetzungen von (4.11), d.h. $D_o' \neq D_o^*$. Andernfalls wäre nämlich ein LSP $(X_t)_{t\in D_o}$ genau dann realisierbar in D_o', wenn er z.k. wäre auf $\mathcal{K}_\sigma(D_o')$ - im Widerspruch zu (2.2).

(4.13) Bemerkung: Neben (4.6) gilt folgendes Realisierbarkeitskriterium.

(4.14): $(X_t)_{t\in D}$ ist realisierbar in D' $\not\subset$ zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder absolutkonvexen abgeschlossenen Nullumgebung U in D^*_σ existiert ein endlich-dimensionaler Teilraum $F = F(U,\varepsilon)$ von D^* so, daß für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\not\subset D',D$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset D' \cap (F+U)^{\sigma(D^*,D)}$ gilt:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{o,X}(A_n) \geq 1 - \varepsilon.$$

Dieses Kriterium erhält man mit den gleichen Methoden wie (4.6), wenn man von der folgenden Aussage ausgeht.

(4.15): Sei $(X_t)_{t\in D}$ ein LSP; dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder absolutkonvexen abgeschlossenen Nullumgebung U in D^*_σ einen endlich-dimensionalen Teilraum $F = F(U,\varepsilon)$ von D^* so, daß $\overline{\mu}_X((F+U)^{\sigma(D^*,D)}) \geq 1 - \varepsilon$.

Beweis zu (4.15): Ergibt sich wegen (4.1) (2) aus [2], Theorem 5.5, da $(F+U)^{\sigma(D^*,D)}$ abzählbarer Durchschnitt von Mengen des Typs $\overline{\pi_S^{-1}(\pi_S(F+U)^{\sigma(D^*,D)})}$ ist (vgl. (6.1)).

Wir zeigen nun, daß das Kriterium in (4.14) nicht einfacher formuliert werden kann, d.h. es gilt

(4.16): Es gibt einen abzählbar-dimensionalen LTVR D, z.B. D_o, und einen LSP $(X_t)_{t\in D}$ so, daß gilt:

(a) $(X_t)_{t\in D}$ ist nicht realisierbar in D'

(b) zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder Nullumgebung U in D^*_σ existiert ein endlich-dimensionaler Teilraum $F = F(U,\varepsilon)$ von D^* so, daß für jedes $A \in \mathcal{Z}_{D',D}$ mit $A \supset D' \cap (F+U)^{\sigma(D^*,D)}$ gilt: $\mu_{o,X}(A) \geq 1 - \varepsilon$.

Beweis zu (4.16): Wir verwenden die Bezeichnungen des Beweises von (4.11).

Sei $\varepsilon > 0$, und sei $U := \{f\in D^* : |\langle f,t_i'\rangle| \leq \delta \ \forall\ 1 \leq i \leq m\}$ ($\delta > 0$, $m\in\mathbb{N}$ beliebig). Dann setzen wir $F = F(U,\varepsilon) := \text{lin}(\{f_m\})$.

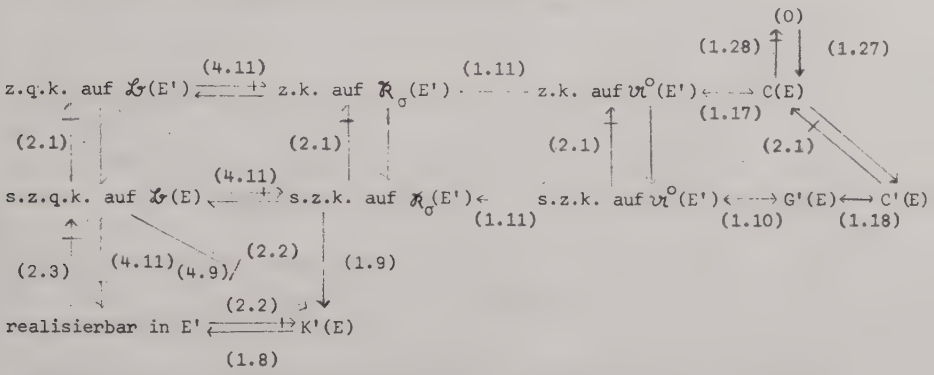
Trivialerweise ist $f_m \in D' \cap (F+U)^{\sigma(D^*,D)}$. Sei nun $A \in \mathcal{Z}_{D',D}$ mit $A \supset D' \cap (F+U)^{\sigma(D^*,D)}$. O.B.d.A. ist

$A = \{f\in D' : (\langle f,t_1'\rangle,\ldots,\langle f,t_n'\rangle) \in B\}$ mit $n\in\mathbb{N}$ und $B \in \mathcal{B}^n$.

Fall 1: $n \leq m$; dann folgt wegen $f_m \in A$ und $\langle f_m,t_i'\rangle = \langle f_o,t_i'\rangle$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$, daß $\mu_{o,X}(A) = 1$.

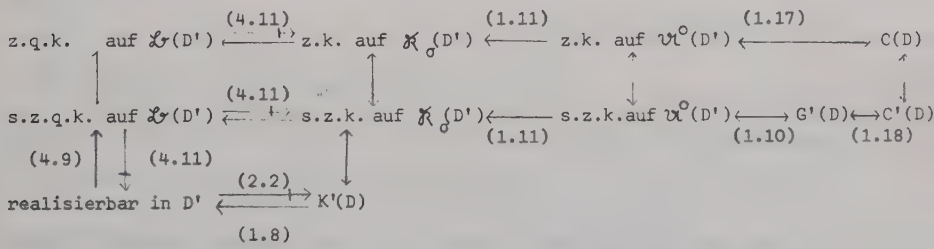
Fall 2: $n > m$; dann existiert $g\in D'$ so, daß $\langle g,t_i'\rangle = 0\ \forall\ 1 \leq i \leq m$ und $\langle f_m,t_i'\rangle + \langle g,t_i'\rangle = \langle f_o,t_i'\rangle$ $\forall\ m < i \leq n$. Folglich ist $g\in U$ und $f_m+g \in D' \cap (F+U)^{\sigma(D^*,D)} \subset A$; da $\langle f_m+g,t_i'\rangle = \langle f_o,t_i'\rangle$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$, ist $\mu_{o,X}(A) = 1$.

(4.17) Schema: Wir geben nun einen Überblick über die bisher betrachteten Realisierbarkeitsbedingungen. Im allgemeinen erhalten wir das folgende Schema (Pfeile ohne Angaben bedeuten triviale oder leicht verifizierbare Implikationen):



Falls E tonneliert, sind die Bedingungen in der zweiten bzw. dritten Reihe dieses Schemas äquivalent (vgl. (1.12)).

Im abzählbar-dimensionalen Fall erhalten wir folgendes Schema:



Schließlich charakterisieren wir bei vorgegebenem Vektorraum E über dem Körper $\mathbb{R}$ diejenigen lokalkonvexen Topologien auf E, für die jeder LSP $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar ist in E'.
Dies wird erreicht durch den folgenden Satz.

(4.18) Satz: Sei E ein LTVR; dann gilt:
jeder LSP $(X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E' $\Leftrightarrow$ $D^* = D'$ $\forall\, D \in \mathcal{D}_E$.

Beweis: " $<$ " : $(X_t)_{t\in E}$ LSP $>$ $(X_t)_{t\in D}$ realisierbar in $D^* = D'$ $\forall\, D \in \mathcal{D}_E$ $>$ $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar in E' (vgl. (1.3)).

" $>$ " : Angenommen, es gibt ein $D_1 \in \mathcal{D}_E$ so, daß $D_1^* \neq D_1'$. Sei $f_1 \in D_1^* \setminus D_1'$, und sei T_1 eine Hamel-Basis von D_1. Wir setzen T_1 fort zu einer Hamel-Basis $T = \{t_i : i \in I\}$ von E.

Sei $f \in E^*$ definiert durch $\langle f, t_i\rangle := \begin{cases} \langle f_1, t_i\rangle, & \text{falls } t_i \in T_1 \\ 0, & \text{falls } t_i \in T \setminus T_1 \end{cases}$;

ein LSP $(X_t)_{t\in E}$ ist gegeben durch $X_t(\omega) := \langle f, t\rangle$ $\forall\, t \in E$, $\forall\, \omega \in \Omega$.

Da $f|_{D_1} = f_1 \notin D_1'$, folgt unmittelbar, daß $(X_t)_{t\in D_1}$ nicht realisierbar ist in D_1'; nach (1.3) ist $(X_t)_{t\in E}$ nicht realisierbar in E'.
Damit ist (4.18) bewiesen.

(4.19) Beispiel: Sei E ein Vektorraum, und sei $\{t_i : i \in I\}$ eine Hamel-Basis von E. Für $F := \{f \in E^* : \langle f, t_i\rangle \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $i \in I\}$ erhalten wir offensichtlich eine Dualität $\langle E, F\rangle$.

Also ist $(E, \sigma(E,F))$ ein LTVR mit $E' = F$. Außerdem ergibt sich leicht, daß $D^* = D'$ $\forall\, D \in \mathcal{D}_E$.
Nach (4.18) ist also jeder LSP $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar in $F = E'$.
Man beachte, daß F echt enthalten ist in E^* genau dann, wenn I überabzählbar ist.

§ 5. Weitere Bemerkungen über gewisse Klassen von Realisierbarkeitsbedingungen.

In diesem Paragraphen werden wir zeigen, daß gewisse Klassen von Realisierbarkeitsbedingungen i.a. nicht hinreichend und notwendig zugleich sind. Ein Ergebnis dieser Art haben wir bereits in (3.8) bewiesen. Mit D_o bezeichnen wir wieder den in (2.2) konstruierten abzählbar-dimensionalen LTVR.

(5.1) Satz: Es gibt einen abzählbar-dimensionalen LTVR, e.g. D_o, so daß für kein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(D_o')$ gilt:

(*) $(X_t)_{t\in D_o}$ ist realisierbar in $D_o' \not\Leftrightarrow (X_t)_{t\in D_o}$ ist z.q.k. auf $\mathcal{M}$ $\forall$ LSP $(X_t)_{t\in D_o}$.

Beweis: Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(D_o')$ beliebig, und sei $\{t_i' : i\in\mathbb{N}\}$ eine Hamel-Basis von D_o.

(I) Wegen der $\sigma(D_o',D_o)$-Stetigkeit von π_S gilt $\overline{\pi_S(M)} = \pi_S(M^{\sigma(D_o',D_o)})$ $\forall$ $S \in \mathcal{V}_{D_o}$ und $\forall$ $M \in \mathcal{M}$. Daher dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß $\mathcal{M}$ nur aus $\sigma(D_o',D_o)$-abgeschlossenen Mengen besteht. Ferner ist o.B.d.A. $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(D_o')$; um dies zu beweisen, genügt es, zu zeigen:

(i) $\mathcal{M}$ erfüllt (*) $\Rightarrow \tilde{\mathcal{M}} := \{M \cap B : M \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{B}(D_o')\}$ erfüllt (*).

Beweis von (i): $(X_t)_{t\in D_o}$ ist z.q.k. auf $\tilde{\mathcal{M}} \supset (X_t)_{t\in D_o}$ ist z.q.k. auf $\mathcal{M} \supset (X_t)_{t\in D_o}$ ist realisierbar in D_o', da $\mathcal{M}(*)$ erfüllt.

Andererseits: $(X_t)_{t\in D_o}$ ist realisierbar in $D_o' \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M = M(\varepsilon) \in \mathcal{M}$ und $B = B(\varepsilon) \in \mathcal{Z}(D_o')$ so, daß

$$\mu_X(M) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu_X(\pi^{-1}_{(t_1',\ldots,t_n')}(\overline{\pi_{(t_1',\ldots,t_n')}(M)})) \geq 1 - \varepsilon/2 \text{ und}$$

$$\mu_X(B) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu_X(\pi^{-1}_{(t_1',\ldots,t_n')}(\overline{\pi_{(t_1',\ldots,t_n')}(B)})) \geq 1 - \varepsilon/2,$$

da $\mathcal{M}(*)$ erfüllt, und wegen (4.9), da gemäß (6.1) für jedes $B \in \mathcal{F}_\sigma(D_o')$ gilt: $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi^{-1}_{(t_1',\ldots,t_n')}(\overline{\pi_{(t_1',\ldots,t_n')}(B)})$.

Folglich ist $\mu_X(M \cap B) \geq 1 - \varepsilon$, also ist $(X_t)_{t\in D_o}$ z.q.k. auf $\tilde{\mathcal{M}}$.

Damit ist (i) bewiesen.

Wegen (1.5) ist o.B.d.A. annehmbar, daß $\mathcal{M} \supset \mathcal{K}_\sigma(D_o')$ (man gehe ggf. von $\mathcal{M}$ über zu $\mathcal{M} \cup \mathcal{K}_\sigma(D_o')$). Daher ist bisher gezeigt, daß wir o.B.d.A. annehmen können: $\mathcal{K}_\sigma(D_o') \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{Z}(D_o')$.

Fall 1: $\mathcal{K}_\sigma(D_o') \subsetneq \mathcal{M} \subset \mathcal{Z}(D_o')$.

Dann gibt es ein $M_o \in \mathcal{M}$ so, daß M_o nicht $\sigma(D_o', D_o)$-vollständig ist (andernfalls wäre jedes $M \in \mathcal{M}$ vollständig und beschränkt bzgl. $\sigma(D_o', D_o)$, also $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}_\sigma(D_o')$). Also gibt es eine Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M_o, welche nicht in M_o konvergiert; da M_o $\sigma(D_o', D_o)$-

abgeschlossen ist, ist sie nicht konvergent in D_o'. Jedoch ist die Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in $(D_o^*, \sigma(D_o^*, D_o))$. Folglich gibt es ein $f_o \in D_o^* \setminus D_o'$ so, daß

(ii) $\langle f_n, t\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f_o, t\rangle \quad \forall\ t \in D_o$.

Sei nun $(X_t)_{t\in D_o}$ ein LSP mit $X_t(\omega) := \langle f_o, t\rangle \quad \forall\ t \in D_o, \ \forall\ \omega \in \Omega$. Dasselbe Argument wie in (4.11) (a) zeigt, daß $(X_t)_{t\in D_o}$ nicht realisierbar ist in D_o'. Andererseits folgt aus (ii):

$$Q_{X_S}(\overline{\pi_S(M_o)}) \geq Q_{X_S}(\pi_S(\{f_o\})) = 1 \quad \forall\ S \in \mathcal{Y}_{D_o},$$

d.h. $(X_t)_{t\in D_o}$ ist z.q.k. auf $\mathcal{M}$, und (*) gilt nicht.

Fall 2: $\mathcal{M} = \mathcal{R}_\sigma(D_o')$.

In diesem Fall zeigt (2.2), daß (*) falsch ist.

Damit ist (5.1) vollständig bewiesen.

(5.2) Bemerkung: Es ist ein offenes Problem, ob in (5.1) "z.q.k." ersetzt werden kann durch "z.k." .

(5.3) Bemerkung: Aus dem Beweis von [1], S. 288, Korollar, leitet man leicht folgende Aussage her:
Es gibt einen abzählbar-dimensionalen, normierten Raum D, so daß für keine lokalkonvexe Topologie τ auf D gilt:

$(X_t)_{t\in D}$ realisierbar in $D' \not\subset (X_t)_{t\in D}$ stetig bzgl. τ $\forall$ LSP $(X_t)_{t\in D}$.

Analog sieht man, daß die obige Aussage richtig bleibt, wenn "stetig bzgl. τ" ersetzt wird durch "folgenstetig bzgl. τ".

Der folgende Satz löst ein Problem, das von H. Millington in einer privaten Kommunikation gestellt wurde. Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}_o(D)$ die gröbste mit der linearen Struktur verträgliche Topologie auf einem LTVR D, bzgl. der alle LSP $(X_t)_{t\in D}$, welche die Bedingung C(D) erfüllen, stetig sind. (Die Existenz von $\mathcal{T}_o(D)$ erschließt man aus [10], Théorème II. 2.3., und aus [21], S. 51).

(5.4) Satz: Es gibt einen abzählbar-dimensionalen, normierten Raum D und einen LSP $(X_t)_{t\in D}$ so, daß gilt:

(a) $(X_t)_{t\in D}$ ist stetig bzgl. $\mathcal{T}_o(D)$.

(b) $(X_t)_{t\in D}$ ist nicht realisierbar in D'.

Beweis: Wir beweisen (5.4) mit den Methoden des Beweises des Korollars in [1], S. 288. Wie üblich sei l_p der Banach-Raum aller Folgen, deren p-te Potenz absolut-summierbar ist.

Sei $2 < p < \infty$, und sei $q := p/p-1$; $E := l_q$, folglich $E' = l_p$.

Für $i\in\mathbb{N}$ sei $e_i := (0,\ldots,0,\underset{\uparrow}{1},0,\ldots)$ und $D := \operatorname{lin}(\{e_i : i\in\mathbb{N}\}) \subset E$.
(i-te Stelle)

Nach dem Beweis des oben zitierten Korollars gibt es eine nicht-negativ-definite quadratische Form Φ auf D mit

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\Phi(e_i)|^{p/2} < \infty.$$

Nach [1], Theorem 5.2, ist $\hat{\mu}(y) := \exp(-\Phi(y))$ die Restriktion auf D des charakteristischen Funktionals eines in E' realisierbaren (Gauß'schen) LSP $(Y_t)_{t\in E}$. Daher ist $(Y_t)_{t\in D}$ in D' realisierbar. Da D normierbar, erfüllt jeder in D' realisierbare LSP die Bedingung C(D) (vgl. (1.20)); also ist $(Y_t)_{t\in D}$ $\mathcal{T}_o(D)$-stetig. Nach (3.3) ist dann $\hat{\mu}$ und damit Φ stetig auf D bzgl. $\mathcal{T}_o(D)$.
In [1], Example 4.2, ist gezeigt, daß für die positiv-definite Funktion $g : D \mapsto \mathbb{R}$,

$y = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n e_n \mapsto \exp\left(-\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-1} |y_n|^{3/2}\right)$, gilt:

$|1 - g(y)| \leq C \cdot \Phi(y)^{3/4}$ $\forall$ $y \in D$, wobei C eine positive Konstante ist.

Folglich ist g stetig auf D bzgl. $\mathcal{T}_o(D)$. Nach [1], Example 4.2, ist jedoch g nicht die Restriktion auf D des charakteristischen Funktionals eines in E' realisierbaren LSP. Daher ist g nicht das charakteristische Funktional eines in D' realisierbaren LSP, denn es ist wegen der Dichtheit von D in E:

$(E', \mathfrak{B}(E')) = (E', \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E',E})) = (E', \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E',D})) = (D', \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{D',D}))$

(dabei sei $\mathfrak{B}(E')$ die Gesamtheit der Borel-Mengen bzgl. der Norm-Topologie in E'). Folglich gilt (a) und (b) für den LSP $(X_t)_{t\in D}$, dessen charakteristisches Funktional g ist.
(Ein solcher LSP existiert nach [10], Théorème II. 5.2.).

§ 6. τ-stetige Maße auf $\mathcal{B}(E'_\sigma)$

Im folgenden (§ 6) sei E ein LTVR und $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP.

(6.1) Hilfssatz: $F = \bigcap_{S \in \mathcal{T}_E} \pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F)}) \quad \forall\, F \in \mathcal{F}_\sigma(E')$.

Beweis: $f_o \in \bigcap_{S \in \mathcal{T}_E} \pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F)})$, $U_{\varepsilon,S_o} := \{f \in E' : |\langle f,t_i\rangle - \langle f_o,t_i\rangle| \leq \varepsilon$

$\forall\, t_i \in S_o\}$ ($\varepsilon > 0$ bel., $S_o \in \mathcal{T}_E$ bel.); dann: $\exists\, f \in F$ so, daß

$|\langle f,t_i\rangle - \langle f_o,t_i\rangle| \leq \varepsilon \quad \forall\, t_i \in S_o$; folglich:

$F \cap U_{\varepsilon,S_o} \neq \emptyset \quad \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, S_o \in \mathcal{T}_E$; also $f_o \in F^{\sigma(E',E)} = F$.

Die umgekehrte Richtung ist trivial.

Wir formulieren und beweisen nun das Hauptergebnis dieses Paragraphen. Man beachte, daß (i) und (ii) in (6.2) Bedingungen ausschließlich an die endlich-dimensionalen Randverteilungen des betrachteten LSP sind.

(6.2) Satz: Es sei E ein LTVR und $(X_t)_{t\in E}$ ein LSP; dann:
$\mu_{o,X}$ ist fortsetzbar zu einem τ-stetigen Maß $\mu \mid \mathcal{B}(E'_\sigma)$ ⁂

(i) Für jede aufsteigende Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{Z}(E'_\sigma)$ mit
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{Z}(E'_\sigma)$ gilt:

$$\inf_{S\in\mathcal{T}_E} Q_{X_S}\left(\overline{\pi_S\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big)}\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{S\in\mathcal{T}_E} Q_{X_S}\left(\overline{\pi_S(F_n)}\right).$$

(ii) Für jedes nach unten gerichtete System $\{F_j : j \in J\} \subset \mathcal{Z}(E'_\sigma)$ mit $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$ gilt: $\inf_{j\in J} \inf_{S\in\gamma_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F_j)}) = 0$.

In diesem Fall ist die Fortsetzung eindeutig.

Beweis: " $\rangle$ " : $\mu|\mathcal{B}(E'_\sigma)$ τ-stetig $\rangle$ (vgl. (6.1))

$$(+)\quad \begin{cases} \mu(F) = \mu\Big(\bigcap_{S\in\gamma_E} \pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F)})\Big) = \inf_{S\in\gamma_E} \mu(\pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F)})) \\ \qquad = \inf_{S\in\gamma_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F)}) \quad \forall\, F \in \mathcal{Z}(E'_\sigma) \subset \mathcal{T}_\sigma(E'). \end{cases}$$

Wegen (+) folgen (i) und (ii) unmittelbar aus der Voraussetzung.

" $\langle$ " : Wir setzen für alle $F \in \mathcal{Z}(E'_\sigma)$

$$(++)\quad \mu(F) := \inf_{S\in\gamma_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F)}).$$

Zunächst zeigen wir

(*) $F_1, F_2 \in \mathcal{Z}(E'_\sigma)$ mit $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ $\rangle$ $\mu(F_1) + \mu(F_2) = \mu(F_1 \cup F_2)$.

ad (*): Wegen (6.1) gilt:

$$F_1 \cap F_2 = \emptyset \;\not\rangle\; \bigcap_{S\in\gamma_E} \pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F_1)}) \cap \bigcap_{S\in\gamma_E} \pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F_2)}) = \emptyset$$

$$\not\rangle\; \bigcap_{S\in\gamma_E} \pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F_1)} \cap \overline{\pi_S(F_2)}) = \emptyset.$$

Dabei ist $\pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F_1)} \cap \overline{\pi_S(F_2)}) \in \mathcal{Z}(E'_\sigma)$ $\forall\, S \in \gamma_E$

(sei nämlich $|S| = m$; dann existieren $g_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$, $n \in \mathbb{N}$, so, daß

$g_n \downarrow \chi_{\overline{\pi_S(F_1)} \cap \overline{\pi_S(F_2)}}$; folglich $h_n := (g_n \wedge 1) \circ \pi_S \in \mathcal{C}(E'_\sigma)$

und $\pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F_1)} \cap \overline{\pi_S(F_2)}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f \in E'_\sigma : h_n(f) - 1 = 0\} \in \mathcal{Z}(E'_\sigma))$.

Nun folgt wegen (ii), da $\{\pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F_1)} \cap \overline{\pi_S(F_2)} : S \in \mathcal{Y}_E\}$ nach unten gerichtet ist:

$$0 = \inf_{S_1 \in \mathcal{Y}_E} \inf_{S_2 \in \mathcal{Y}_E} Q_{X_{S_2}}(\overline{\pi_{S_2}(\pi_{S_1}^{-1}(\overline{\pi_{S_1}(F_1)} \cap \overline{\pi_{S_1}(F_2)}))})$$

$$= \inf_{S \in \mathcal{Y}_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(\pi_S^{-1}(\overline{\pi_S(F_1)} \cap \overline{\pi_S(F_2)}))})$$

$$= \inf_{S \in \mathcal{Y}_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F_1)} \cap \overline{\pi_S(F_2)}), \text{ wie man leicht sieht.}$$

Sei $\varepsilon > 0$ bel.; wir wählen $S_o = S_o(\varepsilon) \in \mathcal{Y}_E$ so, daß

$$Q_{X_{S_o}}(\overline{\pi_{S_o}(F_1 \cup F_2)}) \leq \inf_{S \in \mathcal{Y}_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F_1 \cup F_2)}) + \varepsilon;$$

ferner sei $S_1 = S_1(\varepsilon) \in \mathcal{Y}_E$ so, daß $S_1 \supset S_o$ und

$Q_{X_{S_1}}(\overline{\pi_{S_1}(F_1)} \cap \overline{\pi_{S_1}(F_2)}) \leq \varepsilon$; dann:

$$\mu(F_1) + \mu(F_2) \leq Q_{X_{S_1}}(\overline{\pi_{S_1}(F_1)}) + Q_{X_{S_1}}(\overline{\pi_{S_1}(F_2)})$$

$$= Q_{X_{S_1}}(\overline{\pi_{S_1}(F_1)} \cup \overline{\pi_{S_1}(F_2)}) + Q_{X_{S_1}}(\overline{\pi_{S_1}(F_1)} \cap \overline{\pi_{S_1}(F_2)})$$

$$\leq Q_{X_{S_o}}(\overline{\pi_{S_o}(F_1)} \cup \overline{\pi_{S_o}(F_2)}) + \varepsilon = Q_{X_{S_o}}(\overline{\pi_{S_o}(F_1 \cup F_2)}) + \varepsilon$$

$\leq \inf_{S \in \mathcal{Y}_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F_1 \cup F_2)}) + 2\varepsilon$. Also ist

$\mu(F_1) + \mu(F_2) \leq \mu(F_1 \cup F_2)$.

Andererseits gilt:

$$\mu(F_1 \cup F_2) = \inf_{S \in \mathcal{Y}_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F_1 \cup F_2)})$$

$$\leq \inf_{S \in \mathcal{Y}_E} (Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F_1)}) + Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F_2)}))$$

$$= \inf_{S \in \mathcal{Y}_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F_1)}) + \inf_{S \in \mathcal{Y}_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(F_2)})$$

$$= \mu(F_1) + \mu(F_2).$$

Damit ist (*) bewiesen.

Unter Benutzung von (*) und (i) zeigen wir nun

(**) $\mu(F_1) + \sup \{\mu(F): F \subset F_2 \setminus F_1,\ F \in \mathcal{Z}(E'_\sigma)\} = \mu(F_2)$, falls $F_1, F_2 \in \mathcal{Z}(E'_\sigma)$ mit $F_1 \subset F_2$.

ad (**): Aus (*) und der Monotonie von μ folgt unmittelbar, daß in (**) " $\leq$ " gilt. Um " $\geq$ " zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß eine aufsteigende Folgt $(\tilde{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{Z}(E'_\sigma)$ existiert mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{F}_n = F_2 \setminus F_1$. Wir erhalten nun:

$$\mu(F_1) + \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{F}_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\mu(F_1) + \mu(\tilde{F}_n))$$

$$\underset{(*)}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(F_1 \cup \tilde{F}_n) \underset{(i),(++)}{=} \mu(F_2).$$

Folglich gilt " $\geq$ " in (**).

Wir verifizieren nun die Voraussetzungen von [23], Theorem 4.2..

Sei $\mathcal{K} := \mathcal{Z}(E'_\sigma)$. Wegen der vollständigen Regularität von E'_σ ist $\mathcal{K}_\tau := \{\bigcap \{K: K \in \mathcal{M}\} : \mathcal{M} \subset \mathcal{K}\} = \mathcal{F}_\sigma(E')$.

Wegen (ii) und (++) ist μ τ-stetig in $\emptyset$ bzgl. $\mathcal{K}$.

Aufgrund von (**) sind sämtliche Voraussetzungen des o.g. Theorems erfüllt. Da jedes τ-stetige Maß auf $\mathcal{B}(E'_\sigma)$ regulär ist, ergibt [23], Theorem 4.2.:

$\mu | \mathcal{Z}(E'_\sigma)$ ist eindeutig fortsetzbar [1] zu einem τ-stetigen Maß $\mu | \mathcal{B}(E'_\sigma)$.

Es bleibt nur noch zu zeigen:

(***) $\mu(B) = \mu_{o,X}(B) \quad \forall B \in \mathcal{Z}_{E',E}$

ad (***): Sei $B := \pi_{S_o}^{-1}(A)$, wobei $S_o = (t_1,\ldots,t_m) \in \mathcal{T}_E$ so, daß die t_i $(1 \leq i \leq m)$ linear unabhängig sind, und $A \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^m)$.

Dann ist $B \in \mathcal{Z}(E'_\sigma)$, und es gilt:

$$\mu_{o,X}(B) = Q_{X_{S_o}}(A) = Q_{X_{S_o}}(\pi_{S_o}(B)) = \inf_{S \in \mathcal{T}_E} Q_{X_S}(\overline{\pi_S(B)})$$

$$= \mu(B), \text{ wegen (++)}.$$

Hieraus ergibt sich (***) aufgrund der Eindeutigkeitsaussage bekannter Fortsetzungssätze (z.B. [16], Satz 9.1).

Damit ist (6.2) vollständig bewiesen, da sich die behauptete Eindeutigkeit unmittelbar aus der Beweisführung ergibt.

---

1) Die Eindeutigkeit ist aufgeführt in Theorem B in D. Pollard/ F. Topsøe: A unified approach to Riesz type representation theorems, erscheint in Studia Math..

Zur Abgrenzung von (6.2) dienen die folgenden Beispiele:

(6.3) Beispiel: Es gibt einen LTVR E und einen LSP $(X_t)_{t\in E}$ so, daß gilt:

(a) $\mu_{o,X}$ ist eindeutig fortsetzbar zu einem τ-stetigen Maß $\mu|\mathfrak{B}(E'_\sigma)$,

(b) $\mu|\mathfrak{B}(E'_\sigma)$ ist nicht straff.

Sei nämlich der LTVR E und der LSP $(X_t)_{t\in E}$ gemäß (2.2) konstruiert. (b) ist in (2.2)(b) gezeigt (vgl. (1.4)). (a) gilt, weil $(X_t)_{t\in E}$ realisierbar ist in E' (vgl. (2.2) (a)), weil $\mathfrak{B}(E'_\sigma) = \mathcal{A}(\mathfrak{Z}_{E',E})$ (vgl. (4.1)), und weil jedes Maß auf $\mathfrak{B}(E'_\sigma)$ τ-stetig ist (denn E'_σ ist metrisierbar und separabel (vgl. (4.1))).

(6.4) Beispiel: Es gibt einen LTVR E und einen LSP $(X_t)_{t\in E}$ so, daß gilt:

(a) $(X_t)_{t\in E}$ ist realisierbar in E'.

(b) $\mu_{o,X}$ ist nicht fortsetzbar zu einem τ-stetigen Maß auf $\mathfrak{B}(E'_\sigma)$.

Beweis: Sei $X := [0,\omega[$ die Gesamtheit aller abzählbaren Ordinalzahlen, versehen mit der Ordnungstopologie. Sei $E := \mathcal{C}(X) := \{t: X \mapsto \mathbb{R} \mid t \text{ stetig}\}$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von X. Dann ist E' die Gesamtheit aller Radon-Maße auf X mit kompaktem Träger. Bekanntlich gilt für jedes $t\in E$:

$\exists\ \beta = \beta(t)\in X$ so, daß $\forall\ \alpha \geq \beta$: $t(\alpha) = t(\beta) =: \langle g,t\rangle$.

Offensichtlich ist $g \in E^*$. Wir zeigen nun, daß $g \notin E'$.

Da nämlich X lokal-kompakt, also vollständig regulär ist, und da jede kompakte Menge $K \subset X$ abzählbar, also nach oben beschränkt ist bzgl. der Ordnung in X, folgt:

zu $K \subset X$ kompakt $\exists$ $t = t(K) \in \mathfrak{T}(X)$ so, daß

$t(\alpha) = 0$ $\forall$ $\alpha \in K$ und $t(\alpha) = 1$ $\forall$ $\alpha \geq \beta_o = \beta_o(t) \in X$.

Hieraus ergibt sich schließlich, daß $g \notin E'$.

Der LSP $(X_t)_{t \in E}$ sei nun gegeben durch $X_t(\omega') := \langle g,t \rangle$ $\forall$ $t \in E$, $\forall$ $\omega' \in \Omega$.

ad (a): (a) ist bewiesen in [4], Exposé no 1, Example 1.

ad (b): Angenommen, $\mu_{o,X}$ ist fortsetzbar zu einem τ-stetigen Maß $\mu | \mathfrak{B}(E'_\sigma)$. Dann gilt $\forall$ $S = (t_1,\ldots,t_n) \in \mathfrak{Y}_E$:

(*) $\mu(F_S) = \mu_{o,X}(F_S) = 1$ für $F_S := \{f \in E' : \langle f,t_i \rangle = \langle g,t_i \rangle$ $\forall$ $i \in \{1,\ldots,n\}\}$.

Da $g \notin E'$, ist $\bigcap_{S \in \mathfrak{Y}_E} F_S = \emptyset$. Wegen der τ-Stetigkeit von μ folgt:

$\inf_{S \in \mathfrak{Y}_E} \mu(F_S) = \mu(\bigcap_{S \in \mathfrak{Y}_E} F_S) = \mu(\emptyset) = 0$ - im Widerspruch zu (*).

§ 7. Realisierbarkeit von LSP in Banachräumen.

Im folgenden (§ 7) sei E ein Banachraum, und es sei E' (bzw. E") der starke Dualraum (bzw. der starke Bidualraum) von E. Die abgeschlossene Kugel mit Radius δ um 0 in E (bzw. E', E") wird mit S_δ (bzw. S'_δ, S''_δ) bezeichnet. Wir behandeln Bedingungen für die Realisierbarkeit eines LSP $(X_t)_{t\in E'}$ in E.
Zunächst stellen wir zwei leicht zu beweisende Resultate zusammen.

(7.1) Satz: Sei E ein Banachraum, $(X_t)_{t\in E'}$ ein LSP; dann gilt:

(a) Falls E separabel:

$(X_t)_{t\in E'}$ realisierbar in E $\Leftrightarrow$ $(X_t)_{t\in E'}$ ist z.k. auf $\mathfrak{K}_\sigma(E)$.

(b) Falls E reflexiv:

$(X_t)_{t\in E'}$ realisierbar in E $\Leftrightarrow$ $(X_t)_{t\in E'}$ erfüllt die Bedingung C(E').

Beweis: (a) E ist polnisch, also ist (E, σ(E,E')) Suslin'sch, und die Behauptung folgt aus (1.6).

(b) E' ist Banachraum mit Dualraum E; also folgt (b) aus (1.14) und (1.20).

(7.2) Beispiel: Als einfaches Beispiel für einen in einem nicht-separablen, nicht-reflexiven Banachraum realisierbaren LSP führen wir an:

$E := c_o([0,1])$, also $E' = l_1([0,1])$, $G \subset E$ endlich-dimensional,

also G isomorph zu $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ geeignet, ν beliebiges Maß auf $\mathbb{R}^n$ und ν_G sein isomorphes Bild in G; sei dann $\mu(A) := \nu_G(A \cap G)$ $\forall$ $A \in \mathcal{B}(E_\sigma)$. Offensichtlich ist μ ein Maß auf $\mathcal{B}(E_\sigma)$, also auf $\mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E,E'})$, und somit gibt es einen LSP $(X_t)_{t\in E'}$, der realisierbar ist in E mit $\mu_{X,E} = \mu | \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E,E'})$.

(7.3) Satz: Sei E ein Banachraum, $(X_t)_{t\in E'}$ ein LSP; dann gilt:

$(X_t)_{t\in E'}$ ist realisierbar in E $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, daß man für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{Z}_{E,E'}$ derart, daß ein $S \in \mathcal{Y}_{E'}$ existiert mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{f \in E: \pi_S(f) \in \overline{\pi_S(S_\delta)}\}$, erhält:

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{o,X,E}(A_n) \geq 1 - \varepsilon$.

Beweis: Zunächst bemerken wir:

(*) $\overline{\pi_S(S_\delta)} = \pi_S(S''_\delta)$ $\forall$ $S \in \mathcal{Y}_{E'}$.

Dies ergibt sich aus dem Bipolarensatz, nach welchem S_δ $\sigma(E'',E')$-dicht ist in S''_δ, und aus dem Satz von Alaoglu-Bourbaki, nach welchem S''_δ $\sigma(E'',E')$-kompakt ist; also ist $\pi_S(S''_\delta)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^{|S|}$ wegen der $\sigma(E'',E')$-Stetigkeit von π_S.

" $\Rightarrow$ " : $(X_t)_{t\in E'}$ realisierbar in E $\Rightarrow$ $(X_t)_{t\in E'}$ realisierbar in E" und $\mu_{X,E''}(A) = \mu_{X,E}(E \cap A)$ $\forall$ $A \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E'',E'})$. Also gilt

(**) $\mu^*_{X,E''}(E) = \mu_{X,E}(E) = 1$.

Nach (1.20) und (1.17) ist $(X_t)_{t\in E'}$ z.k. auf $\mathcal{U}^\circ(E'')$, d.h.

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, daß

$\mu_{X,E''}(\{f\in E'': \pi_S(f) \in \pi_S(S''_\delta)\}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall\ S \in \mathcal{Y}_{E'}$.

Nun folgt aus (**)

(***) $\mu^*_{X,E''}(\{f\in E: \pi_S(f) \in \pi_S(S''_\delta)\}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall\ S \in \mathcal{Y}_{E'}$.

Sei nun $A_n := \{f\in E: \pi_{S(n)}(f)\in B(n)\}$ eine Folge, die den Bedingungen aus (7.3) genügt. Dann ist $A''_n := \{f\in E'': \pi_{S(n)}(f)\in B(n)\}$ aufgrund des Satzes von Hahn-Banach eine aufsteigende Folge in $\mathcal{Z}_{E'',E'}$ so, daß

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{o,X,E}(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{o,X,E''}(A''_n) = \mu_{X,E''}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A''_n\Big) \geq 1 - \varepsilon$$

wegen (***) und (*).

" $\leq$ " : Nach Voraussetzung und (*) ist

$\mu_{o,X,E''}(\{f\in E'': \pi_S(f)\in \pi_S(S''_\delta)\}) = \mu_{o,X,E}(\{f\in E: \pi_S(f) \in \pi_S(S''_\delta)\})$

$\geq 1 - \varepsilon \quad \forall\ S \in \mathcal{Y}_{E'}$. Also ist $(X_t)_{t\in E'}$ z.k. auf $\mathcal{U}^\circ(E'')$, folglich realisierbar in E''. Als nächstes zeigen wir

(i) $\mu^*_{X,E''}(\{f\in E: \pi_S(f) \in \pi_S(S''_\delta)\}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall\ S \in \mathcal{Y}_{E'}$.

Nach dem Beweis von (4.4) ist es klar, daß wir hierzu zu zeigen haben, daß für jede aufsteigende Folge $(A''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{Z}_{E'',E'}$ mit

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A''_n \supset \{f\in E: \pi_S(f) \in \pi_S(S''_\delta)\}$ gilt: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{o,X,E''}(A''_n) \geq 1 - \varepsilon$.

Nach Voraussetzung ergibt sich für

$A_n := A_n'' \cap \{f \in E: \pi_S(f) \in \pi_S(S_\delta'')\} \in \mathcal{Z}_{E,E'}$, daß

$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_{o,X,E}(A_n) \geq 1 - \varepsilon$. Daher ist

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_{o,X,E''}(A_n'') = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_{o,X,E}(A_n'' \cap E) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_{o,X,E}(A_n) \geq 1 - \varepsilon.$$

Also gilt (i).

Wegen (i) ist nun $\mu^*_{X,E''}(E) = 1$, also $(X_t)_{t \in E'}$ realisierbar in E

und $\mu_{X,E} | \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E,E'}) = \mu^*_{X,E''} | \mathcal{A}(\mathcal{Z}_{E,E'})$ (vgl. [19], Ergänzung 1.4.4)

Damit ist (7.3) bewiesen.

Wir zeigen nun an Hand eines Beispiels von de Acosta (vgl. [2], S. 221/222), daß in (7.3) nicht darauf verzichtet werden kann, Folgen von zylindrischen Mengen zu betrachten.

(7.4) Satz: Es gibt einen Banachraum E und einen LSP $(X_t)_{t \in E'}$ so, daß folgendes gilt:

(a) $(X_t)_{t \in E'}$ ist nicht realisierbar in E

(b) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, daß

$$\mu_{o,X,E}(\{f \in E: \pi_S(f) \in \overline{\pi_S(S_\delta)}\}) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall\ S \in \mathcal{Y}_{E'}.$$

Beweis: Wir betrachten $E := \{f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\}$

und versehen E mit der Supremumsnorm. Nach [15], (20.48) ist

$E' = \{t : t \text{ signiertes Maß auf } (\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \text{ mit endlicher Totalvariation}\}$.

Es gibt ein $t_o \in E'$ so, daß $\{\langle f,t_o\rangle : f \in S_1\} =]-1,1[$ und $\|t_o\|' = 1$, und es gibt ein $g \in E'' \setminus E$ mit $\|g\|'' = 1$ und $\langle g,t_o\rangle = \int_{\mathbb{R}} g\,dt_o = 1$ (z.B. $t_o = \mathcal{N}(0,1)$; $g(x) \equiv 1$). Wir definieren einen LSP $(X_t)_{t\in E'}$ durch $X_t(\omega) := \langle g,t\rangle = \int_{\mathbb{R}} g\,dt = t(\mathbb{R})$ $\forall\, t \in E'$, $\forall\, \omega \in \Omega$.

Dann ist $\overline{\mu}_X = \varepsilon_g$, das Dirac-Maß zu g.

<u>ad (b):</u> (b) ist in dem o.g. Beispiel von de Acosta bewiesen.

<u>ad (a):</u> Sei $t_n := \chi_{[0,n]} \cdot \lambda$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$; dann ist $t_n \in E'$ und

$$(*)\quad g \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{h \in E'^* : \langle h,t_n\rangle = n\} =: A \in \mathcal{A}(\zeta_{E'^*,E'}),$$

da $\langle g,t_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} g\,dt_n = \int_0^n 1\,d\lambda = n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ferner ist

$$(**)\quad A \cap E = \emptyset,$$

denn: $f \in A \cap E \;\Rightarrow\; \exists\, n_o \in \mathbb{N}$ so, daß $|f(x)| \le 2^{-1}$ $\forall\, x \ge n_o$, und

$\langle f,t_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\,dt_n = \int_0^n f\,d\lambda = n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, insbesondere

$\int_{n_o}^{n_o+1} f\,d\lambda = 1$ - im Widerspruch zu $\left|\int_{n_o}^{n_o+1} f\,d\lambda\right| \le \int_{n_o}^{n_o+1} 2^{-1}\,d\lambda = 2^{-1}$.

Wir erhalten wegen (*) und (**):

$\overline{\mu}_X^*(E) = \varepsilon_g^*(E) \le \varepsilon_g(\complement A) = 0$.

Also ist $(X_t)_{t\in E'}$ nicht realisierbar in E.

§ 8. Eine Bemerkung über die Fortsetzbarkeit realisierbarer LSP.

Wir sagen, ein LSP $(Y_t)_{t\in E_2}$ sei die Fortsetzung eines LSP $(X_t)_{t\in E_1}$, falls $E_2 \supset E_1$ und $(Y_t)_{t\in E_1}$ äquivalent $(X_t)_{t\in E_1}$. Es gilt nun:

(8.1) Satz: Es gibt einen Banachraum E sowie einen abzählbar-dimensionalen, $\sigma(E',E)$-dichten Teilraum D von E' und einen LSP $(X_t)_{t\in D}$ derart, daß gilt:

(a) $(X_t)_{t\in D}$ ist realisierbar in E

(b) $(X_t)_{t\in D}$ besitzt keine Fortsetzung zu einem in E realisierbaren LSP $(X_t)_{t\in E'}$.

Beweis: Sei $E := l_1([0,1])$, also $E' = m([0,1])$.

t'_k sei wie im Beweis zu (2.2) definiert ($k \geq 1$).

$T := \{t'_k : k \geq 2\}$, $D := \text{lin}\,(T \cup \{t'_1\}) \subset E'$.

Wir zeigen zunächst:

(i) lin (T) ist $\sigma(E',E)$-dicht in E'.

Sei nämlich $t\in E'$, $\varepsilon > 0$, $n\in\mathbb{N}$, $f_1,\dots,f_n \in E$; dann existiert $S = S(\varepsilon,f_1,\dots,f_n,t) \subset [0,1]$ endlich so, daß $\forall\ 1 \leq i \leq n$:

$\sum_{x\in \complement S} |f_i(x)| \cdot \|t\| \leq \varepsilon/6$; ferner existiert $t^*\in$ lin (T) so, daß $|t(x)-t^*(x)| \leq \varepsilon/(2\cdot|S| \cdot \max_{1\leq i\leq n} |f_i(x)|)$ $\forall\ x\in S$,

und $\|t^*\| \leq 2\|t\|$. (Es sei $\varepsilon/0 := \infty$). Nun folgt:

$$|\langle t-t^*, f_i\rangle| \leq \sum_{x\in[0,1]} |f_i(x)| \cdot |t(x) - t^*(x)|$$

$$= \sum_{x\in S} \dots + \sum_{x\in \complement S} \dots \leq \varepsilon/2 + 3 \cdot \sum_{x\in \complement S} |f_i(x)| \cdot \|t\| \leq \varepsilon \quad \forall\ 1\leq i\leq n,$$

d.h. es gilt (i).

Sei $(X_t)_{t\in D}$ definiert wie ein Beweis zu (2.2).

ad (a): analog zum Beweis von (2.2) (a). (Man beachte, daß E identifizierbar ist mit D').

ad (b): Angenommen, es gibt eine Fortsetzung $(X_t)_{t\in E'}$ gemäß (b). Sei $\Delta := \{\delta_x : x \in [0,1]\} \subset E$ mit $\langle \delta_x, t\rangle := t(x) \quad \forall\, t \in E'$.

Wie im Beweis zu (2.2) (b) zeigt man, daß Δ $\sigma(E,D)$-abgeschlossen ist, also $\Delta \in \mathfrak{B}(E, \sigma(E,D)) = \mathcal{A}(\mathfrak{Z}_{E,D}) \subset \mathcal{A}(\mathfrak{Z}_{E,E'})$, und daß

$$\mu_{X_D,E}(A) = \tilde{\lambda}(\{x \in [0,1] : \delta_x \in A\}) \quad \forall\, A \in \mathcal{A}(\mathfrak{Z}_{E,D}),$$

also $\mu_{X_{E'},E}(\Delta) = \mu_{X_D,E}(\Delta) = \tilde{\lambda}([0,1]) = 1$. Für $B \in \mathfrak{P}([0,1])$ sei $\nu(B) := \mu_{X_{E'},E}(\{f \in E: \langle f, \chi_B\rangle = 1\})$, also

$$\nu(B) = \mu_{X_{E'},E}(\{\delta_x \in E: \langle \delta_x, \chi_B\rangle = 1\}).$$

Dann ist $\nu \mid \mathfrak{P}([0,1])$ ein Maß, also ist ν rein diskret. (vgl. [5], Satz 1C'). Folglich ist

$$\sum_{x\in[0,1]} \mu_{X_D,E}(\{\delta_x\}) = \sum_{x\in[0,1]} \mu_{X_{E'},E}(\{\delta_x\}) = \sum_{x\in[0,1]} \nu(\{x\}) = 1 \quad -$$

im Widerspruch zu $\sum_{x\in[0,1]} \mu_{X_D,E}(\{\delta_x\}) = \sum_{x\in[0,1]} \tilde{\lambda}(\{x\}) = 0.$

(8.2) Bemerkung: Sei E Banachraum und D ein abzählbar-dimensionaler, $\beta(E',E)$-dichter Teilraum von E' (dann ist E notwendig separabel). Dann ist jeder in E realisierbare LSP $(X_t)_{t\in D}$ fortsetzbar zu einem in E realisierbaren LSP $(X_t)_{t\in E'}$.

Diese Aussage beweist man leicht durch Betrachtung kanonischer Prozesse.

Literaturverzeichnis.

[1] A.D. DE ACOSTA: Existence and convergence of probability measures in Banach spaces.
Trans. Amer. Math. Soc. 152, 273-298, 1970.

[2] A.D. DE ACOSTA: On the concentration and extension of cylinder measures.
Trans. Amer. Math. Soc. 160, 217-228, 1971.

[3] S. AHMAD : Elements aleatoires dans les espaces vectoriels topologiques.
Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, Vol. II, no 2, 95-135, 1965.

[4] A. BADRIKIAN : Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques.
Lecture Notes in Mathematics 139.
Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

[5] D. BIERLEIN : Über die Fortsetzung von Wahrscheinlichkeitsfeldern.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1, 28-46, 1962.

[6] P. BILLINGSLEY: Convergence of probability measures.
New York: Wiley 1968.

[7] M.M. DAY : Normed linear spaces.
Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1962.

[8] R.M. DUDLEY : Random linear functionals.
Trans. Amer. Math. Soc. 136, 1-24, 1969.

[9] R.M. DUDLEY, J. FELDMAN and L. LE CAM: On seminorms and probabilities,and abstract Wiener spaces. Ann. of Math. (2) 93, 390-408, 1971.

[10] X. FERNIQUE : Processus linéaires, processus généralisés. Ann. Inst. Fourier 17,1, 1-92, 1967.

[11] P. GÄNSSLER : Über straffe Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Raum der Schwartzschen Distributionen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 7, 309-326, 1967.

[12] I.M. GELFAND and N.J. WILENKIN: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) IV. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964.

[13] R.K. GETOOR : On characteristic functions of Banach space valued random variables. Pacific J. Math. 7, 885-897, 1957.

[14] D. HEIDEMANN : Wahrscheinlichkeitsmaße in Funktionenräumen. Diplomarbeit Ruhr-Universität Bochum 1973.

[15] E. HEWITT and K. STROMBERG: Real and abstract analysis. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.

[16] H.G. KELLERER : Maßtheorie Vorlesungsskriptum, Bochum 1970/71.

[17] G. KÖTHE : Topologische lineare Räume. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.

[18] H. MILLINGTON : Cylinder measures over locally convex spaces. Erscheint in Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. .

[19] J. NEVEU : Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie. München und Wien: Oldenbourg 1969.

[20] A. PIETSCH : Nukleare lokalkonvexe Räume. Berlin: Akademie-Verlag 1969.

[21] H.H. SCHAEFER : Topological vector spaces. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.

[22] L. SCHWARTZ : Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research 1973.

[23] F. TOPSØE : On construction of measures. København Universitet Matematisk Institut, Preprint Series 1974 No 27. Kopenhagen 1974.

L e b e n s l a u f

Geburtsdatum und -ort:	17.12.1949 in Ergste, Kr. Iserlohn
Eltern:	Herbert Heidemann und Frau Annelore geb. Schröder
Geschwister:	ein jüngerer Bruder, Volker.
Familienstand:	verheiratet, keine Kinder
Schulausbildung:	Grundschule: Ev. Volksschule, Ergste (Ostern 1956 bis Ostern 1960) Gymnasium: Städt. Friedrich-Bährens-Gymnasium, Schwerte-Ruhr (Ostern 1960 bis zum 14.5.1968) Reifeprüfung: 14.5.1968
Studium:	Studium der Mathematik und Physik an der Ruhr-Universität Bochum (WS 68/69 bis SS 73) Diplom-Vorprüfung in Mathematik (1.12.1970) Diplom-Hauptprüfung in Mathematik (18.6.1973)
Berufstätigkeit:	Verwalter der Stelle eines Wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut der Ruhr-Universität Bochum (seit dem 1.7.1973)

Bochum, den 27. Mai 1975

(Dirk Heidemann)

Bamberger Fotodruck
GmbH & Co. KG.
Schadel & Wehle
86 Bamberg · Hohe-Kreuz-Str. 9b · Telefon: 0951/21617